МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ I

Учебник для учащихся 10 классов средних
образовательных учреждений и учащихся
учреждений среднего специального,
профессионального образования

Утвержден Министерством народного образования
Республики Узбекистан

ТАШКЕНТ
2017

УДК 51(075.3)
KBK 22.1
М 63

Авторы части «Алгебра и начала анализа»:

Мирзаахмедов М. А., Исмаилов Ш.Н., Аманов А.К.

Автор части «Геометрия» Хайдаров Б.К.

Рецензенты:

Бешимов Р.Б. – зав. кафедрой "Геометрия и топология" НУУ им. Мирзо Улугбека, доктор физико-математических наук;

Пардаева М.Д. – зам. директора Республиканского центра образования;

Давлетов Д.Е. – зав. кафедрой "Методика преподавания математики" ТГПУ им. Низами, кандидат физико-математических наук;

Рахимов Г.М. – преподаватель академического лицея при ТИИИ и МСХ , кандидат физико-математических наук, доцент;

Акмалов А. А. – проректор Ташкентского городского ИПК и ППРНО, кандидат педагогических наук, доцент.

Использованные в учебнике обозначения и пояснение к ним:

△ – начало решения задачи (доказательства)

▲ – конец решения задачи (доказательства)

(!) – задания контрольных работ и тестовые задания

(?) – вопросы и задачи

– основная информация

– задачи повышенной трудности

Издано за счет средств Республиканского целевого книжного фонда

ISBN 978-9943-4859-9-0

Глава I

МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА

1-4 ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДОПОЛНЕНИЕ К МНОЖЕСТВУ

Понятие множества является одним из исходных понятий математики в том смысле, что его нельзя определить с помощью более простых, чем оно само, понятий. В повседневной жизни часто приходится рассматривать набор некоторых объектов как единое целое. Скажем, когда биолог изучает флору и фауну некоторой местности, он делит организмы на виды, а виды на семейства. При этом каждый вид рассматривается как единое целое, состоящее из организмов.

Множество может состоять из объектов различной природы. Например, все реки Азии или все слова в словаре могут рассматриваться как множества.

Знаменитый немецкий математик Г. Кантор (1845 –1918) дал следующую описательную формулировку: «Множество есть совокупность, мыслимая как единое целое».

Объекты, составляющие множество, называются его элементами.

Обычно, для удобства, множество обозначается заглавными буквами латинского алфавита, например, $A, B, C, \ldots$, а его элементы – прописными.

Множество A, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$, будем записывать в виде $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Отметим, что записи $\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ означают одно и то же множество.

Приведем примеры множеств. Например, множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество цифр десятичной системы счисления, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – множество гласных букв английского алфавита. Мы можем обозначить множество учащихся 10 "А" класса через $\{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$, где a_1 – первый по журналу учащийся, ... a_{30} – тридцатый по журналу учащийся.

То, что x является элементом множества A, будем обозначать как $x \in A$, а то, что он не является его элементом, будем обозначать как $x \notin A$. Эти записи в первом случае читаются как «элемент x принадлежит A», а во втором случае как «элемент x не принадлежит A».

Например, для множества $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ имеем $4 \in A$, однако $9 \notin A$.

Если число элементов, составляющих множество, конечно, то такое множество будем называть **конечным**, в противном случае **бесконечным**.

Например, множество $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ – конечно, а множество $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ всех натуральных чисел бесконечно.

В качестве еще одного примера бесконечного множества можно привести множество всех натуральных чисел, не меньших 13.

Обозначим через $n(A)$ число всех элементов конечного множества A. Если, например, $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$, то $n(A)=6$, в силу того, что число всех его элементов равно 6. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается так: $\emptyset$

Пустое множество $\emptyset$ считается конечным и для него $n(\emptyset)= 0$.

Для бесконечного множества A принято, что $n(A)= \infty$.

Если все элементы множества A также принадлежат множеству B, то говорят, что множество A – подмножество множества B и обозначают так: $A \subseteq B$. В этом случае также говорят, что «множество A лежит во множестве B» или «множество A – часть B».

Во множестве $\{a\}$ лежат два подмножества: $\emptyset$ и $\{a\}$.

Множество $\{a, b\}$ имеет четыре подмножества: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{a, b\}$.

$\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, так как все элементы первого множества также являются элементами второго.

Если множество A имеет элементы, не принадлежащие B, то множество A не может быть подмножеством B. Этот факт мы будем записывать так: $A \not\subset B$.

Например, пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. Так как $1 \notin B$, то $A \not\subset B$.

Очевидно, что справедливы соотношения: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то эти множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называются **равными (совпадающими),** и этот факт мы будем записывать так: $A = B$.

Например, множество всех правильных треугольников совпадает со множеством всевозможных треугольников, у которых все углы равны. Причина этого заключается в том, что у любого правильного треугольника все углы равны, и, наоборот, если у треугольника все углы равны, то он является правильным.

Напомним основные числовые множества: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – множество целых чисел; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел; $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ – множество действительных чисел.

Объединение и пересечение множеств

1) Множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, называется **объединением множеств**.

Объединение множеств A, B обозначается через $A \cup B$.

Например, если $P=\{1, 3, 4\}$ и $Q=\{2, 3, 5\}$, то $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) Множество, состоящее из элементов, принадлежащих обоим множествам A, B, называется **пересечением множеств**. Пересечение множеств A, B обозначается через $A \cap B$.

Например, если $P=\{1, 3, 4\}$ и $Q=\{2, 3, 5\}$, то $P \cap Q=\{3\}$.

Множества, не имеющие общих элементов, называются *непересекающимися*.

Пример 1. Для множеств $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ и $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$:

a) определите, какие из утверждений верны, а какие неверны: **I** $4 \in M$; **II** $6 \notin M$;

b) найдите множества: **I** $M \cap N$; **II** $M \cup N$;

c) определите, какие из утверждений верны, а какие неверны: **I** $M \subseteq N$; **II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

△ a) Так как число 4 не является элементом множества M, то утверждение $4 \in M$ неверно. Так как число 6 не является элементом множества, утверждение $6 \notin M$ истинно.

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, так как только числа 3 и 9 – элементы обоих множеств. Для того, чтобы найти множество $M \cup N$ выпишем элементы, принадлежащие либо M, либо N: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) Утверждение $M \subseteq N$ ложно, ибо существуют элементы множества M, не принадлежащие N. Утверждение $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ истинно, ибо в множестве N есть элементы из $\{9, 6, 3\}$. ▲

Упражнения

1. 1. Используя знаки $\in, \notin, \subseteq, \nsubseteq$, напишите утверждения:

a) число 5 – элемент множества D;

b) число 6 не является элементом множества D;

c) множество $\{2, 5\}$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

d) множество $\{3, 8, 6\}$ не является подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

2. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, для множеств A и B:

a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;

c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3. Найдите число элементов каждого из множеств:

a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

c) $A \cap B$; d) $A \cup B$.

4. Определите, является ли множество:

a) всех натуральных чисел, больших 10, но меньших 20;

b) всех натуральных чисел, больших 5, конечным или бесконечным?

5. Какие из множеств не пересекаются:

a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;

b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

В некоторых случаях для задания множества указывается *характеристическое свойство,* истинное для всех элементов множества и ложное для остальных. Если мы кратко запишем тот факт, что элемент x удовлетворяет свойству P как $P(x)$, то множество всех элементов, удовлетворяющих свойству P обозначается так: $\{x|P(x)\}$.

Например, запись $A = \{\, x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ x \in \mathbb{Z}\}$ читается следующим образом: "множество всех целых чисел, больших или равных –2, но меньших или равных 4".

На числовом луче это множество изображается так:

Видно, что $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ и оно, конечно, при этом $n(A) = 7$.

Аналогично запись $B = \{\, x \mid -2 \leqslant x < 4,\ x \in \mathbb{R}\}$ читается так:

"множество всех действительных чисел, больших или равных –2, но меньших 4".

На числовом луче это множество изображается так:

Видно, что , $B = [-2, 4)$ и оно бесконечно, при этом $n(B) = \infty$.

Пример 2. Пусть $A = \{ x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$.

a) Как читается эта запись?

b) Выпишите последовательно элементы этого множества.

c) Найдите $n(A)$.

△ a) "Множество всех целых чисел, больших 3 и меньших или равных 10";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $n(A) = 7$. ▲

Упражнения

6. Какие из множеств конечны, а какие бесконечны:

a) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{ x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Прочитайте записи:

a) $A = \{ x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{ x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Выпишите элементы этих множеств, если это возможно.

8. Запишите кратко следующие множества:

a) "множество всех целых чисел, больших –100 и меньших 100";

b) "множество всех действительных чисел, больших 1000";

c) "множество всех действительных чисел, больших или равных 2, но меньших или равных 3".

9. Ответьте на вопросы:

a) Выпишите все подмножества множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a, b, c, d\}$. Сколько их?

b) Сколько подмножеств имеет множество B, состоящее из n элементов?

10. В каких случаях выполнено включение $A \subseteq B$?

a) $A = \varnothing$ и $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ и $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ и $B = \{ x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ и $B = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{ x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ и $B = \{ z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ и $B = \{ y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Рассмотрим множество всех натуральных чисел, больших или равных 1, но меньших или равных 8. Пусть нас интересуют только его подмножества.

В таком случае, обычно вводится множество $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$, называемое ***универсальным множеством***.

Множество A', содержащее все элементы универсального множества U, не являющиеся элементами множества A, называется ***дополнением множества*** A.

Например, если $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – универсальное множество, то дополнение множества $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ имеет вид $A' = \{2, 4, 6\}$.

Очевидно, что $A \cap A' = \emptyset$; $A \cup A' = U$; $n(A) + n(A') = n(U)$, т.е. множества A и A' не имеют общих элементов, а также все составляющие их элементы образуют в совокупности универсальное множество U.

Пример 3. Пусть U универсальное множество. Найдите C', *если*:

a) $C = \{$*все четные числа*$\}$; b) $C = \{ x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

△ a) $C' = \{$*все нечетные числа*$\}$; b) $C' = \{ x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$. ▲

Пример 4. Пусть $U = \{ x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$. Выпишите все элементы множеств:

a) A; b) B; c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

△ a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\}$;
d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$
e) $A \cap B = \{1\}$;
f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\}$;
h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$. ▲

Упражнения

11. Найдите C'.

a) $U = \{$*буквы английского алфавита*$\}$, $C = \{$*согласные буквы*$\}$;
b) $U = \{$*целые числа*$\}$, $C = \{$*отрицательные целые числа*$\}$;
c) $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;
d) $U = \mathbb{Q}$, $C = \{ x \mid x \leqslant 2$ *или,* $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. Пусть $U = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$. Найдите:

a) A; b) A'; c) B; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. Пусть $n(U) = 15$, $n(P) = 6$, $n(Q') = 4$. Найдите:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. Пусть $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$. Найдите:

a) B'; b) C'; c) A'; d) $A \cap B$;
e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

Пример 5. Пусть $U=\mathbb{N}$, $P=\{$числа, кратные 4 и меньшие 50$\}$ и $Q=\{$числа, кратные 6 и меньшие 50$\}$.

a) выпишите элементы множеств P, Q;

b) найдите $P \cap Q$; c) Найдите $P \cup Q$;

d) проверьте выполнение равенства $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$.

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,

$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;

b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;

c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;

d) $n(P \cup Q) = 16$ и $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Значит, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ равенство *является верным.* ▲

Упражнения

15. Пусть $U=\mathbb{N}$, $P=\{$*простые числа, меньшие* 25$\}$ и $Q=\{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$.

a) выпишите элементы множеств P;

b) найдите $P \cap Q$; c) найдите $P \cup Q$;

d) проверьте выполнение равенства $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$.

16. Пусть $U=\mathbb{N}$, $P=\{$делители числа 30$\}$ и $Q=\{$делители числа 40$\}$.

a) выпишите элементы множеств P, Q;

b) найдите $P \cap Q$; c) найдите $P \cup Q$;

d) проверьте выполнение равенства $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$.

17. Пусть $U=\mathbb{N}$, $P=\{$кратные числа 4, лежащие между числами 30 и 60$\}$ и $Q=\{$кратные числа 6, лежащие между числами 30 и 60$\}$.

a) выпишите элементы множеств P, Q;

b) найдите $P \cap Q$; c) найдите $P \cup Q$;

d) проверьте выполнение равенства $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$.

18. Пусть $U=\{x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B=\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C=\{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$. Найдите:

a) B'; b) C'; c) A'; d) $A \cap B$;

e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. Пусть $U=\mathbb{Z}$, $C=\{y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ и $D=\{y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) выпишите элементы множеств C, D;

b) найдите $C \cap D$; c) найдите $C \cup D$;

d) проверьте выполнение равенства $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$.

20. Пусть $U=\mathbb{N}$, $P=\{$кратные числа 12$\}$, $Q=\{$кратные числа 18$\}$ и $R=\{$кратные числа 27$\}$.

a) выпишите элементы множеств P, Q, R;

b) найдите **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;

c) найдите **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup$ R.

21. Пусть $U = \mathbb{N}$, A = {кратные числа 4, меньшие 40},
B = {кратные числа 6, меньшие 40} и
C = {кратные числа 12, меньшие 40}.

a) выпишите элементы множеств A, B, C;

b) найдите **I** $A \cap B$; | **II** $B \cap C$; | **III** $A \cap C$; | **IV** $A \cap B \cap C$.

c) найдите $A \cup B \cup C$;

d) проверьте выполнение равенства
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

22. Пусть $U = \mathbb{N}$, A={кратные числа 6, меньшие 31}, B = {делители 30} и
C = {простые числа, меньшие 30}.

a) выпишите элементы множеств: A, B, C;

b) найдите **I** $A \cap B$; | **II** $B \cap C$; | **III** $A \cap C$; | **IV** $A \cap B \cap C$.

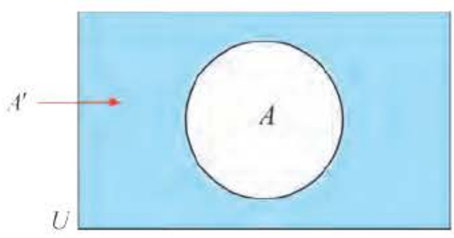
c) найдите $A \cup B \cup C$;

d) проверьте выполнение равенства:
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

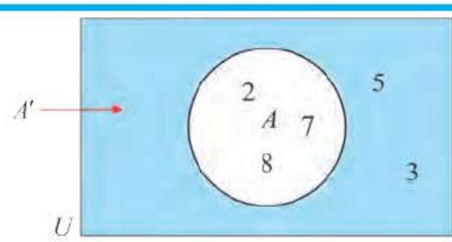
Диаграммы Венна

Удобно изображать множества в виде диаграммы Венна. В диаграмме Венна универсальное множество U будем изображать как прямоугольник, а множество – как круг, лежащий в этом прямоугольнике.

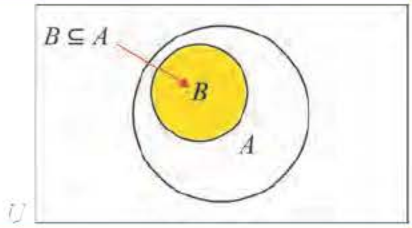
Например, на этом рисунке изображено множество A, лежащее внутри универсального множества U. Закрашенная область вне круга означает дополнение A' множества A:



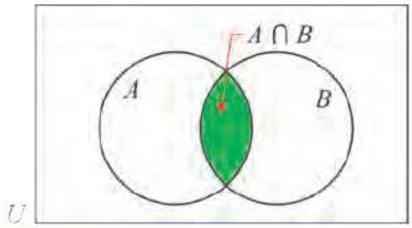
Если $U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ и $A' = \{3,5\}$, то они изображаются на диаграмме Венна следующим образом:



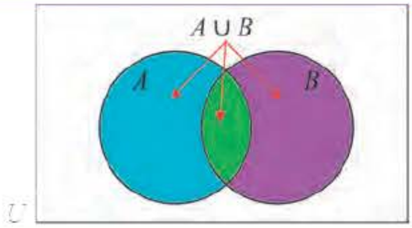
Мы знаем, что если $B \subseteq A$, то любой элемент множества B принадлежит множеству A. Значит, на соответствующей диаграмме Венна круг, обозначающий множество B, лежит в круге, обозначающем множество A:



Все элементы пересечения $A \cap B$ лежат как в A, так и в B. Значит, на соответствующей диаграмме Венна закрашенная область изображает множество $A \cap B$:



Все элементы объединения $A \cup B$ принадлежат либо A, либо B, либо обоим одновременно. Значит, на соответствующей диаграмме Венна область, соответствующая множеству $A \cup B$, изображается следующим образом:

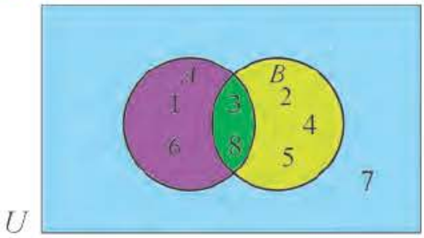


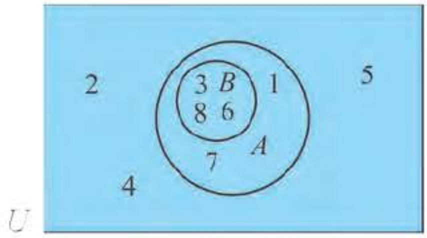
Пример 6. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Изобразите на диаграмме Венна множества:

a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ и $B = \{3, 6, 8\}$.

△ a) $A \cap B = \{3, 8\}$ b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$





▲

Упражнения

23. Изобразите на диаграмме Венна множества A, B:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ и $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ и $B = \{3, 5\}$.

24. Пусть $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, A = {нечетные числа, меньшие 10} и B = {простые числа, меньшие 10}.

a) выпишите элементы множеств A, B;

b) изобразите множества A, B на диаграмме Венна;

c) найдите множества $A \cap B$ и $A \cup B$.

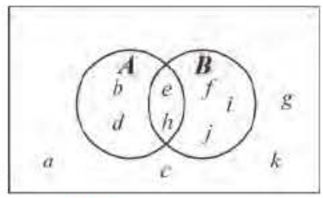
25. Пусть $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, A = {кратные числа 6} и B = {кратные числа 9}.

a) выпишите элементы множеств A, B;

b) найдите множества $A \cap B$ и $A \cup B$;

c) изобразите множества A, B на диаграмме Венна.

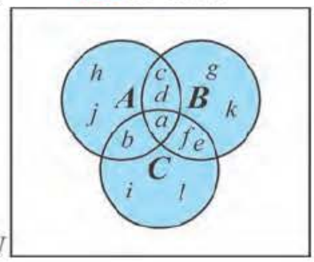
26. На диаграмме Венна изображены множества A, B. Выпишите элементы множеств:



U

II A; **II** B; **III** A'; **IV** B';
V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VII** $A' \cup B'$.

27. На диаграмме Венна изображены множества A, B, C.



U

a) Выпишите элементы множеств:

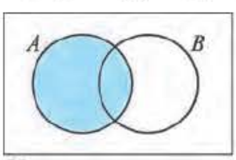
I A;	**II** B;	**III** C;
IV $A \cap B$;	**V** $A \cup B$;	**VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$;	**VII** $A \cup B \cup C$.	

b) Найдите:

I $n(A \cup B \cup C)$;

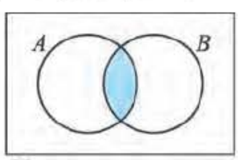
II $n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Удобно на диаграмме Венна множества раскрашивать.
Например, на рисунке раскрашены множества A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$:



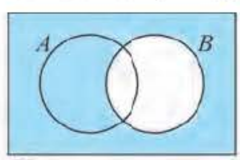
U

A



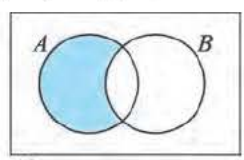
U

$A \cap B$



U

B'



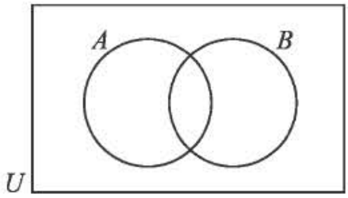
U

$A \cap B'$

Упражнения

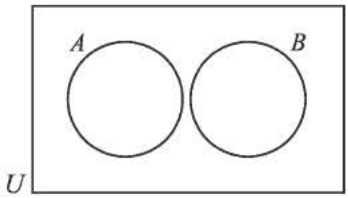
Перерисуйте в тетрадь диаграммы и раскрасьте данные множества:

28.



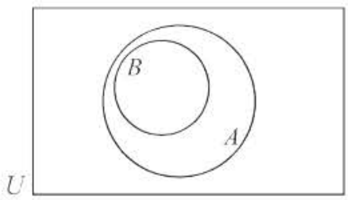
a) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; d) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



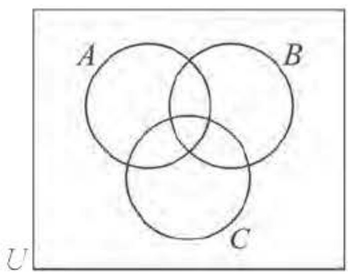
a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

30.



a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A; b) B';
c) $B \cap C$; d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$; f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$; h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 ВЫСКАЗЫВАНИЯ. ОТРИЦАНИЕ, КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ

Высказывание – это повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, при этом непременно истинное или ложное.

Вопросительные предложения, повествовательные предложения, описывающие личное отношение субъекта, например «Зеленый цвет приятен», не являются высказываниями. Отметим, что существуют высказывания, истинность или ложность которых не определяются однозначно.

Например, высказывание "Этот писатель родился в Ташкенте" может быть истинным по отношению к некоторым писателям и ложным по отношению к другим.

Пример 1. Укажите, какие из предложений являются высказываниями. В случае, когда предложение является высказыванием, однозначно ли определяется его истинность – ложность?

a) 20:4=80; b) 25·8=200;

c) Где мой карандаш? d) У тебя глаза голубые.

△ a) Это высказывание и оно ложно, так как 20:4=5;

b) это высказывание и оно истинно;

c) это вопросительное предложение и поэтому оно не является высказыванием;

d) это высказывание. Истинность–ложность его определяется неоднозначно, так как применительно к некоторым людям оно истинно, а к другим – ложно. ▲

Мы будем обозначать высказывания буквами *p, q, r* … .

Например, *p:* во вторник прошел дождь; *q:* 20:4=5; *r: x* – четное число.

Для построения нескольких сложных высказываний служат символы, называемые *логическими связками*: ∧ (конъюнкция, "и", "но"), ∨ (дизъюнкция, "или"), ¬ (отрицание," не ....","неверно, что ....").

Рассмотрим их подробней.

Отрицание

Для высказывания *p* высказывание вида "не *p*" или "неверно, что *p*" называется отрицанием высказывания *p* и обозначается как ¬*p*.

Например,
отрицанием высказывания
p: *Во вторник шел дождь*
является высказывание
¬*p*: *Во вторник дождя не было*;

Отрицанием высказывания
p: *У Мадины глаза голубые*
является высказывание.
¬*p*: *У Мадины глаза не голубые.*

Ясно, что если *p* истинно, то ¬*p* ложно, и наоборот, если *p* ложно, то ¬*p* истинно. Этот факт иллюстрируется так называемой таблицей истинности. Такая таблица позволяет, исходя из высказывания *p,* заключить об истинности T[1] или ложности F[1] нового высказывания ¬*p*:

p	¬*p*
T	F
F	T

1 Буквы T и F – начальные буквы английских слов "true" (истинно) и "false" (ложно) соответственно.

Упражнения

32. Укажите, какие из предложений являются высказываниями. В случае, когда предложение является высказыванием, однозначно ли определяется его истинность – ложность?

a) $11-5=7$; b) 12 –четное число; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
e) Параллелограмм имеет 4 стороны.
f) 37 – простое число.
g) Каков твой рост?
h) Все квадраты – четырехугольники.
i) Идет ли снег?
j) Четырехугольник не является параллелограммом.
k) Твоему братику 13 лет.
l) Нравятся ли тебе исторические книги?
m) Мадина хорошо поет.
n) Ты родился в Самарканде.
o) Противоположные углы равны.
p) Параллельные прямые пересекаются.

33. Составьте отрицание высказывания. Истинно ли оно?

a) p: все четырехугольники являются параллелограммами;
b) q: $\sqrt{5}$ – иррациональное число; c) r: 7 – рациональное число;
d) s: $23-14=12$; e) t: $52:4=13$;
f) u: разность двух четных чисел нечетна;
g) p: произведение последовательных натуральных чисел четно;
h) q: все тупые углы равны;
i) r: все трапеции – параллелограммы;
j) s: если в треугольнике две стороны равны, то он называется равнобедренным.

34. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Составьте отрицания высказываний:

a) $x > 5$; b) $x \geqslant 3$; c) $y < 8$; d) $y \leqslant 10$.

35. Для заданных высказываний r, s определите, будет ли высказывание s отрицанием высказывания r? В случае, когда высказывание s не является отрицанием высказывания r, найдите отрицание высказывания r.

a) r: Рост Мадины выше 140 см; s: Рост Мадины ниже 140 см;
b) r: Акбар занимается футболом; s: Акбар занимается музыкой;
c) r: Я сегодня пил черный чай; s: Я сегодня пил зеленый чай;
d) r: Я был в Самарканде; s: Я никогда не был в Самарканде.

Пример 2. Составьте отрицание высказывания:

a) x − дыня, $x \in$ {*дыни, арбузы*};	b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$;	c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;
a) x − арбуз;	b) $x = 1$;	c) $x < 2$ и $x \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

36. Составьте отрицание высказывания.

a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;

b) $x \in$ {*лошади, овцы*};

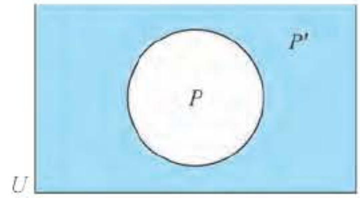
c) $x \geqslant 0, x \geqslant \mathbb{Z}$;

d) x − ученик, $x \in$ {*ученики*};

e) x − ученица, $x \in$ {*девочки*}.

Удобно находить отрицание высказывания с помощью диаграмм Венна. Например, рассмотрим высказывание:

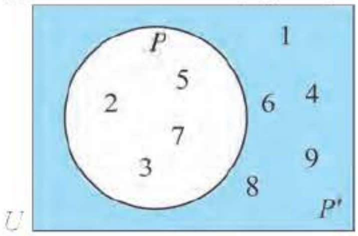
p: "Число x больше, чем 10 ".



На диаграмме U – множество всех чисел, множество P – множество истинности высказывания p, то есть множество всех x , для которых это высказывание истинно. Множество P' является множеством истинности отрицания $\neg p$: "Число x меньше или равно 10".

Пример 3. На множестве $U=\{ x \mid 0 < x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ рассмотрим высказывание p: x– *простое число*. Найдите множества истинности высказываний p и $\neg p$.

Пусть множество P – множество истинности высказывания p, а множество P' – множество высказывания $\neg p$. Тогда эти множества изображаются на диаграмме Венна следующим образом:



Упражнения

37. Составьте отрицание высказывания и изобразите на диаграмме Венна:

a) $U = \{ x \mid 20 < x < 30\}$, p: x − простое число ;

b) $U = \{ x \mid 1 < x < 10\}$, p: x − четное.

38. Пусть U = {ученики 10 класса}, M = {*ученики, посещающие музыкальный кружок*}, O ={*ученики, играющие в оркестре*}. Изобразите на диаграмме Венна следующие высказывания:

a) все ученики, посещающие музыкальный кружок, играют в оркестре;

b) ни один ученик, играющий в оркестре, не посещает музыкальный кружок;

c) все ученики, играющие в оркестре, не посещают музыкальный кружок.

39. Пусть $U = \{ x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$, p: $x < 9$. Изобразите высказывание на диаграмме Венна и выпишите все элементы множества истинности отрицания $\neg p$.

40. Пусть $U = \{ x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$, p: x – четные числа. Изобразите высказывание на диаграмме Венна и выпишите все элементы множества истинности отрицания.

Конъюнкция

Высказывание, образованное из двух высказываний с помощью связки "и", называется *конъюнкцией* заданных высказываний.

Конъюнкция высказываний p, q обозначается через $p\wedge q$.

Например, конъюнкция высказываний,

p: Эльдар на завтрак ел плов;

q: Эльдар на завтрак ел самсу.

имеет вид:

$p\wedge q$: Эльдар на завтрак ел плов и самсу.

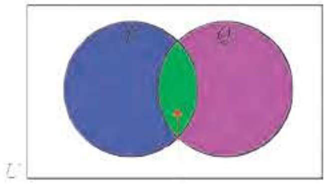
Видно, что высказывание $p\wedge q$ верно, если Эльдар на завтрак ел и плов и самсу, то есть высказывание $p\wedge q$ истинно при истинности обоих высказываний. Если хотя бы одно из высказываний p, q ложно, то высказывание $p\wedge q$ является ложным.

Конъюнкция высказываний p, q имеет следующую таблицу истинности:

p	q	$p\wedge q$	
T	T	T	$p\wedge q$ истинно, когда оба высказывания p, q истинны.
T	F	F	$p\wedge q$ ложно, когда хотя бы одно из высказываний p, q ложно.
F	T	F	
F	F	F	

Первый и второй столбцы таблицы составлены из всех возможных значений истинности высказываний p, q.

На диаграмме P – множество истинности высказывания p, Q – множество истинности высказывания q , а множество истинности высказывания $p \wedge q$ является множеством $P \cap Q$, на котором истинны оба высказывания:



$P \cap Q$

Упражнения

41. Составьте конъюнкцию высказываний:

a) p: Мадина – терапевт; | q: Муниса – стоматолог;
b) p: число x больше, чем 15; | q: число x меньше, чем 30 ;
c) p: облачно; | q: идет дождь;
d) p: у Алима черные волосы; | q: у Алима голубые глаза.

42. Определите, истинность высказывания $p \wedge q$:

a) p: 5 – нечетное число; | q: 5 – простое число;
b) p: квадрат имеет четыре стороны; | q: треугольник имеет пять сторон;
c) p: $39 < 27$; | q: $16 > 23$;
d) p: 12 делится на 3; | q: 12 делится на 4;
e) p: $5+8 = 12$; | q: $6+9 = 15$.

43. Пусть $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12,\ x \in \mathbb{Z}\}$. p: x – четное число, q: x– меньше, чем 7.
Изобразите на диаграмме Венна множества истинности высказываний: a) p, q; b) $p \wedge q$.

Дизъюнкция

Высказывание, образованное из двух высказываний с помощью связки "или", называется *дизъюнкцией* заданных высказываний.

Дизъюнкция высказываний p, q обозначается через $p \vee q$.

Например, дизъюнкция высказываний,

p: Эльдар сегодня посетит библиотеку;

q: Эльдар сегодня посетит театр .

имеет вид:

$p \vee q$: Эльдар сегодня посетит библиотеку или театр.

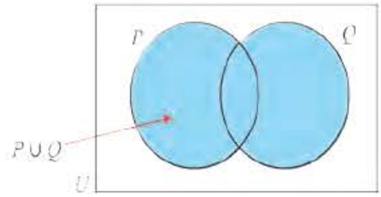
Высказывание $p \vee q$ истинно, когда сегодня Эльдар посетит либо библиотеку, либо театр, либо и то и другое.

Высказывание $p \vee q$ будет ложным, лишь когда оба высказывания p, q будут ложными одновременно.

Дизъюнкция имеет следующую таблицу истинности:

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	$p \vee q$ истинно, когда хотя бы одно из высказываний p, q истинно.
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	$p \vee q$ ложно, когда оба высказывания p, q ложны.

На диаграмме P – множество истинности высказывания p, Q – множество истинности высказывания q, а множество истинности высказывания $p \vee q$ является множество $P \cup Q$, на котором истинно хотя бы одно высказывание:



Упражнения

44. Определите, истинно или ложно высказывание $p \vee q$:

a) p: 24 делится на 4, q: 24 делится на 6;

b) p: $-8>-5$, q: $5<0$.

45. Определите, будет ли высказывание $p \vee q$ истинным или ложным?

a) p: Среднее арифметическое чисел 5 и 9 равно 7,
q: Среднее арифметическое чисел 8 и 14 равно 10;

b) p: $5+8 = 12$, q: $6+9 = 15$.

46. Пусть $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbb{Z}\}$,
p: x кратно 3, q: x – простое число.

a) Изобразите на диаграмме Венна множества истинности высказываний p, q;

b) Изобразите на диаграмме Венна множества истинности высказываний **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$.

47. Пусть $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$,
p: x – простое число, q: x делитель числа 12.

a) Изобразите на диаграмме Венна множества истинности высказываний p, q;

b) Изобразите на диаграмме Венна множества истинности высказываний **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$.

48. x: Сардор завтра пойдет на плавание;
y: Сардор завтра пойдет на футбол. Запишите кратко следующие высказывания, используя логические связки x, y и $\neg$, $\vee$, $\wedge$:

a) Сардор завтра не пойдет на плавание;

b) Сардор завтра пойдет и на плавание, и на футбол;

c) Сардор завтра пойдет либо на плавание, либо на футбол;

d) Сардор завтра не пойдет ни на плавание, ни на футбол;

e) Сардор завтра пойдет на плавание, но не пойдет на футбол.

49. Запишите кратко следующие высказывания, используя логические связки ¬, ∨ и ∧:

a) Сардору нравятся мороженое и прохладительные напитки;

b) Сардору нравится мороженое, а прохладительные напитки ему не нравятся;

c) x – простое число, большее 10;

d) компьютер не исправен.

50. Следующие высказывания определяют приблизительный распорядок дня Сардора:

p: Сардор рано проснулся;

q: Сардор съел на завтрак сметану;

r: Сардор съел на завтрак суп;

s: Сардор на ужин съел плов;

u: Сардор позанимался спортом;

v: Сардор прочел книгу.

Выскажите на естественном языке (прочитайте):

a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$.

8-9 ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОСИЛЬНОСТЬ. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

Составим, используя буквы и символы логических связок таких, как отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, символическую запись более сложных высказываний естественного языка, при этом не обращая внимания на их истинность или ложность.

Высказывание естественного языка	Символическая запись
Отрицание:	
1. Салим **не** дома.	$\neg S$
2. Средства легко **не** изыскиваются.	$\neg M$
3. **Неверно**, что Рашид прочел книгу.	$\neg R$
4. То, что Марьям в Бухаре – **ложь**.	$\neg B$
Конъюнкция:	
5. Акмаль и Суннат – оба учителя.	$A \wedge S$
6. Бобур, **а также** Ало занимаются спортом.	$B \wedge A$
7. Бобур сильный, но Ало сильней его.	$B \wedge A$

8. Футбольный клуб "Барселона" признан лучшим, **несмотря на то, что** все медиасредства были против.	$M \wedge B$
Дизъюнкция: 9. Рано приедет либо на метро, либо автобусом. 10. Этот вид спорта выбрал Бобур или Ало.	$M \vee A$ $B \vee A$

Объединяя таблицы истинности для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, можно составить таблицы истинности для более сложных высказываний:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Пример 1. Составьте таблицу истинности высказывания $p \vee \neg q$.

1 шаг.

Выпишем таблицу и заполним сначала первый и второй столбец всеми возможными значениями истинности p и q:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2 шаг

Учитывая значения истинности q, заполним третий столбец значениями истинности $\neg q$:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3 шаг

Учитывая значения истинности p и $\neg q$, заполним четвертый столбец значениями истинности $p \vee \neg q$:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Высказывание, являющееся истинным всегда, называется ***законом логики или тавтологией***.

То, что высказывание является законом логики, можно доказать при помощи таблицы истинности.

Пример 2. Докажите, что высказывание $p \vee \neg p$ является тавтологией.

△ Заполним таблицу истинности: Видно, что высказывание $p \vee \neg p$ принимает только истинные значения (см. третий столбец). Поэтому данное высказывание является тавтологией. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Если для двух высказываний соответствующие их значениям истинности столбцы одинаковы, то эти высказывания называются ***логически равносильными***.

Пример 3. Докажите, что следующие высказывания являются логически равносильными $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$.

△ Составим таблицы истинности для высказываний $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

Так как у высказываний $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$ соответствующие значениям истинности столбцы одинаковы, то эти высказывания являются логически равносильными.

Мы будем обозначать этот факт так: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. ▲

Упражнения

51. Составить таблицы истинности высказываний:

a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Являются ли высказывания тавтологией:

a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Докажите логическую равносильность:

a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$;

c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$; d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Рассмотрим высказывания:

p: Сардор любит яблоки; *q:* Сардор любит виноград.

Выразите следующие высказывания средствами естественного языка:

a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Составив таблицу истинности, докажите логическую равносильность высказываний $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.

10-11 ИМПЛИКАЦИЯ , КОНВЕРСИЯ, ИНВЕРСИЯ И КОНТРАПОЗИЦИЯ

Импликация

Высказывание, образуемое из двух высказываний с помощью связки "если .... , то ..." называется ***импликацией*** этих двух высказываний.

Импликация "Если p, то q" обозначается как $p \Rightarrow q$ и имеет также следующие интерпретации "Из p следует (вытекает) q", "Высказывание p достаточно для q ", "Высказывание q необходимо для p".

При этом высказывание p называется достаточным условием для q, а высказывание q – необходимым условием для p.

Рассмотрим , например, высказывания

p: У Сардора есть телевизор; *q: Сардор будет смотреть кино.*

Тогда высказывание $p \Rightarrow q$ означает:

Если у Сардора есть телевизор, то он будет смотреть кино.

Точно также $p \Rightarrow q$:

Для того, чтобы Сардор смотрел кино достаточно, чтобы у него был телевизор.

Можно заметить, что высказывание $p \Rightarrow q$ ложно, лишь когда высказывание p истинно, а высказывание q ложно, а в остальных случаях – истинно. Поэтому имеем следующую таблицу истинности:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Из высказываний и логических связок, не обращая на значения истинности, можно составить более сложные высказывания.

Пример 1. Рассмотрим высказывания

p: "Анора часто смотрит кинофильмы";

q: "Барно часто смотрит кинофильмы ";

r: "Барно не сдаст экзамен";

s: "произойдет чудо".

△ Имеем:

1. $p \wedge \neg q$: "Анора часто смотрит кинофильмы, а Барно – нет".
2. $p \Rightarrow \neg q$: "Если Анора часто смотрит кинофильмы, то Барно нет".
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: "Если Барно часто смотрит кинофильмы, то она или не сдаст экзамен или произойдет чудо".
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: "Если Барно часто смотрит кинофильмы и при этом не произойдет чуда, то Барно не сдаст экзамен".
5. $(q \wedge s) \vee r$: "Либо Барно часто смотрит кинофильмы и произойдет чудо, либо Барно не сдаст экзамен". ▲

Эквиваленция

Высказывание вида $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ называется ***эквиваленцией*** высказываний и обозначается так: $p \Leftrightarrow q$.

Запись $p \Leftrightarrow q$ читается как "высказывание p необходимо и достаточно для q" или как "высказывание p истинно лишь при выполнении q".

Пример 2. p: x – четно, q: последняя цифра числа x четна. Выразите высказывание $p \Leftrightarrow q$.

△ Рассмотрим высказывание, $p \Rightarrow q$: Если x– четно, то его последняя цифра четна;

$q \Rightarrow p$: Если последняя цифра числа x четна, то x – четно.

Тогда запись $p \Leftrightarrow q$ читается , как "Для того чтобы число x было четно, необходимо и достаточно, чтобы последняя его цифра была четной". ▲

Теперь для заданных высказываний p и q составим таблицу истинности высказывания $p \Leftrightarrow q$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Видно, что высказывание $p \Leftrightarrow q$ будет истинным, лишь когда высказывания p и q принимают одинаковые значения истинности (то есть когда они оба одновременно истинны или одновременно ложны).

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Упражнения

56. В следующих импликациях определите необходимые, достаточные условия и выразите эти высказывания по –другому, используя слова «необходимо», «достаточно»:

a) если я не успею на утренний автобус, то я опоздаю в школу;

b) если температура снизится, то вода замерзнет;

c) если $x > 20$, то $x > 10$;

d) если я забью гол, то наша команда может победить..

57. Выразите высказывание $p \Rightarrow q$ на естественном языке:

a) p: будет солнечно, | q: я пойду купаться;

b) p: число x делится на 6, | q: x – четно;

c) p: в холодильнике есть яйца, | q: Мадина приготовит торт.

58. Составьте таблицы истинности высказываний:

a) $p\Rightarrow \neg q$; | b) $\neg q\Rightarrow \neg p$; | c) $(p\lor q)\Rightarrow p$; | d) $q\land(p\Rightarrow q)$;
e) $p\Leftrightarrow \neg q$; | f) $(p\Leftrightarrow q)\land \neg p$; | g) $p\Rightarrow(p\land\neg q)$; | h) $(p\Rightarrow q) \Rightarrow\neg p$.

59. Рассмотрим высказывания: *p:* шёл дождь, *q:* образовались лужи; Запишите высказывания в символической форме:

a) если шел дождь, то значит будут лужи;
b) образовались лужи, значит шел дождь;
c) луж нет; d) дождь не шел;
e) если дождь не шел, то луж нет;
f) если луж нет, то дождь не шел;
g) если луж нет, то шел дождь;
h) для того чтобы образовались лужи, необходимо и достаточно, чтобы шел дождь.

60. Составив таблицы истинности, докажите, что $\neg p \Rightarrow q = p\lor q$:
$p\Leftrightarrow q = (p\land q)\lor(\neg p\land\neg q)$.

61. Какое из высказываний будет логически равносильным высказыванию $q \Rightarrow p$:

a) $p\Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$; c) $q \Rightarrow\neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Какие из высказываний всегда истинны? Всегда ложны?

a) $p\Rightarrow(\neg p\land q)$; b) $p\land q \Rightarrow p\lor q$; c) $(p \Rightarrow \neg q) \lor (\neg p \Rightarrow q)$.

Конверсия

Конверсией высказывания $p\Rightarrow q$ называется высказывание $q\Rightarrow p$.
Конверсия имеет следующую таблицу истинности:

p	q	$q\Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Пример 3. Рассмотрим высказывания
p: треугольник равнобедренный,
q: два угла треугольника равны.
Выразите на естественном языке высказывание $p\Rightarrow q$ и его конверсию.

△ $p\Rightarrow q$: Если треугольник равнобедренный, то у него два угла равны.
$q\Rightarrow p$: Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный . ▲

Инверсия

Инверсией высказывания $p\Rightarrow q$ называется высказывание $\neg p\Rightarrow\neg q$.

Инверсия имеет следующую таблицу истинности:

Эта таблица совпадает с таблицей истинности высказывания $q \Rightarrow p$. Поэтому конверсия и инверсия логически равносильны.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Контрапозиция

Контрапозицией высказывания $p \Rightarrow q$ называется высказывание $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Контрапозиция имеет следующую таблицу истинности:

Эта таблица совпадает с таблицей истинности высказывания $p \Rightarrow q$. Поэтому импликация и контрапозиция логически равносильны.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

Пример 4. Рассмотрим высказывание."Все учителя живут поблизости от школы". Составим его контрапозицию.

△Данное высказывание можно сформулировать так: "Если этот человек – учитель, что он живет поблизости от школы".
Это предложение имеет форму $p \Rightarrow q$, где

p: этот человек – учитель, q: этот человек живет поблизости от школы.
Контрапозиция $\neg q \Rightarrow \neg p$ имеет вид:

"Если этот человек не живет поблизости от школы, то он не является учителем.▲

Пример 5. Рассмотрим высказывания:

p: Самандар находится в библиотеке, q: Самандар читает книгу.
Составьте имликацию, конверсию, инверсию и контрапозицию.

△**Импликация** $p \Rightarrow q$	Самандар находится в библиотеке, он читает книгу.
Конверсия $q \Rightarrow p$	Если Самандар читает книгу, то он находится в библиотеке.
Инверсия $\neg p \Rightarrow \neg q$	Самандар находится не в библиотеке, но он не читает книгу.
Контрапозиция $\neg q \Rightarrow \neg p$	Если Самандар не читает книгу, то он не находится в библиотеке.

Отметим, что импликация и конверсия логически не равносильны, так как , например , Самандар может читать книгу и в классе.▲

Упражнения

63. Составьте конверсию и инверсию:

a) если Диера оденет джемпер, то она согреется;

b) если два треугольника подобны, то его углы соответственно равны;

c) если $2x^2 = 12$, то $x = \pm\sqrt{6}$;

d) если Алим играет, то он радуется;

e) если треугольник правильный, то его стороны равны.

64. Составьте контрапозицию:

a) все розы имеют шипы;

b) все судьи всегда принимают справедливое решение;

c) все хорошие футболисты точно попадают мячом в цель;

d) когда жидкость наливают в сосуд, то она принимает форму сосуда;

e) если человек честен и образован, то он успешен.

65. a) Составьте контрапозицию высказывания "все ученики 10 класса изучают математику";

b) Пусть утверждение "все ученики 10 класса изучают математику" истинно. Какие выводы можно сделать непосредственно из следующих высказываний: "Шавкат – ученик 10 класса"; "Мирислам не изучает математику"; "Дониер изучает и математику, и английский"?

66. Составьте контрапозицию высказываний:

a) число x делится на 3 $\Rightarrow$ число x^2 делится на 9;

b) если последняя цифра числа x равна 2 $\Rightarrow$ x – четно;

c) $ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow$ $AB \| CD$ и $AD \| BC$;

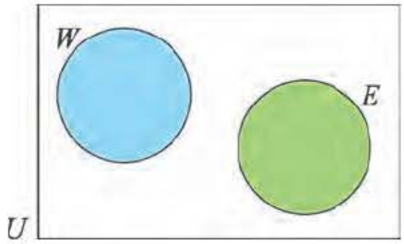
d) ABC – правильный треугольник $\Rightarrow$ $\angle ABC = 60°$.

67. Пусть p: Дом имеет не более 3 окон, q: Дом имеет дымовую трубу. Тогда $p \Rightarrow q$: Если дом имеет не более трех окон, то он имеет дымовую трубу;

a) составьте конверсию, инверсию и контрапозицию;

b) в следующих случаях определите истинность–ложность импликации, конверсии, инверсии и контрапозиции:

68. На диаграмме изображены W – множество слабоуспевающих учеников, E – множество учеников 10 класса. Заполните пропущенные места:



a) не существуют слабоуспевающих учеников .... ;

b) не существуют .... учеников 10 класса;

c) если $x \in W$, тогда ...... ;

d) если $x \in E$, тогда ...... ;

e) как связаны перед собой отношения *c* и *d?*

12-13 ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

Предикаты и кванторы

В некоторых предложениях участвуют переменные, при этом подставив вместо них конкретные значения, получим высказывания. Такие предложения называются ***предикатами***.

Пример 1. Пусть задан предикат $P(x)$: "$x^2 > x$". Определите истинность или ложность высказываний $P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$.

△ $P(2): 2^2 > 2$ – истинно.

$P(\frac{1}{2}): (\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{2}$ – ложно.

$P(-\frac{1}{2}): (-\frac{1}{2})^2 > -\frac{1}{2}$ – истинно. ▲

В некоторых предикатах переменную можно определить исходя из контекста.

Например, в предложениях "Этот писатель родился в Ташкенте" и "Он родился в Ташкенте" переменными являются словосочетание". "Этот писатель" и местоимение "он" соответственно. Если вместо переменной подставить значение "Абдулла Кадыри", получим истинное высказывание "Абдулла Кадыри родился в Ташкенте". Если вместо переменной подставить значение "Шекспир", получим ложное высказывание "Шекспир родился в

Ташкенте".

Обозначив переменную через x, вышеуказанные предложения можно записать в виде "x родился в Ташкенте".

В предикате могут участвовать одно или несколько переменных. В зависимости от количества переменных, участвующих в предикате, будем обозначать его так: $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ...

Используя совместно с предикатом специальные символы $\forall$ (квантор всеобщности, "для всех ... ") и $\exists$ (квантор существования, "существует такой, что .... "), можно образовать новые высказывания

Например, новое высказывание вида $\forall x P(x)$ говорит о том, что для всех значений x верно $P(x)$, высказывание вида $\exists x P(x)$ говорит о том, что значений x верно $P(x)$.

К примеру, рассмотрим предикат $P(x)$: "x родился в Самарканде". Тогда высказывание $\forall x P(x)$ читается как "все родились в Самарканде", а высказывание $\exists x P(x)$ – "некоторые родились в Самарканде".

Приведем примеры, в которых можно определить истинность–ложность высказываний вида $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$.

Пример 2. Пусть $D= \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Докажите истинность высказывания: $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$.

△ Проверим: $1^2 \geqslant 1$, $2^2 \geqslant 2$, $3^2 \geqslant 3$, $4^2 \geqslant 4$, $5^2 \geqslant 5$.
Значит, высказывание, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ истинно. ▲

Следует отметить, что для того, чтобы доказать ложность высказывания $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$, достаточно, привести пример хотя бы одного значения x такого, что высказывание $x^2 \geqslant x$, ложно.

Действительно, при $x=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Любое значение x, которое показывает, что высказывание $\forall x P(x)$ ложно, называется ***контрпримером.***

Пример 3. Докажите истинность высказывания $\exists m \in \mathbb{Z}\ m^2=m$.
△ Так как $1^2=1$, то высказывание, $\exists m \in \mathbb{Z}\ m^2=m$ истинно.
Если же $E=\{5,6,7,8\}$, то высказывание $\exists m \in E\ m^2=m$ ложно, ибо
$5^2 = 25 \neq 5$; $6^2 = 36 \neq 6$; $7^2 = 49 \neq 7$; $8^2 = 64 \neq 8$. ▲

Приведем два важных закона логики, связанных с операцией отрицания: $\neg(\exists x P(x))= \forall x(\neg P(x))$, $\neg(\forall x P(x))= \exists x(\neg P(x))$.

Для понимания смысла этих законов приведем пример.

Если запись $\neg(\exists x P(x)$: означает $\forall x(\neg P(x))$ "Среди моих одноклассников не существует отличников", тогда запись означает логически равносильное ему утверждение "Все мои одноклассники не являются отличниками".

Точно также, формула $\neg(\forall x P(x))$ означает высказывание "Неверно, что все мои одноклассники – отличники ", а формула $\exists x(\neg P(x))$ означает логически равносильное ему высказывание "Некоторые мои одноклассники не являются отличниками".

Очевидно, что с помощью кванторов и предиката $P(x,y)$ можно построить зависящие от одной переменной предикаты вида:

$$\forall x P(x,y), \qquad \forall y P(x,y), \qquad \exists x P(x,y), \qquad \exists y P(x,y),$$

из которых, в свою очередь, можно построить всказывания вида:

$$\forall x \exists y P(x,y), \qquad \exists y \forall x P(x,y), \qquad \exists x \forall y P(x,y), \qquad \forall y \exists x P(x,y),$$

$$\forall x \forall y P(x,y), \qquad \forall y \forall x P(x,y), \qquad \exists x \exists y P(x,y), \qquad \exists y \exists x P(x,y).$$

В то время, когда смысл высказываний $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ и $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$, а также смысл высказываний $\forall x \exists y P(x,y)$ одинаков, оказывается, что высказывания $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ не являются равносильными.

Рассмотрим, например, предикат $P(x,y)$*: человек у – отец моего одноклассника х.*

В этом случае $\forall x \exists y P(x,y)$ = означает высказывание "у каждого моего одноклассника есть отец"; а $\exists y \forall x P(x,y)$ означает высказывание "существует такой человек, который является отцом всех моих одноклассников".

Аналогично можно показать, что высказывания, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ не являются равносильными (приведите примеры самостоятельно).

С помощью кванторов и предикатов можно построить и другие законы логики. Например, высказывание «Если все вороны черные, то ни одна не черная птица не является вороной ", служит примером закона логики вида:

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\ (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

Упражнения

69. Выразите высказывания с помощью предикатов и кванторов:

a) некоторые птицы не могут летать;
b) некоторые писатели – не поэты;
c) некоторые насекомые не жалят;
d) все планеты имеют форму шара;
e) все военные – сильные люди;
f) все хирурги – врачи;
g) все медведи употребляют мед;
h) всякий круг – плоская фигура;
i) некоторые кролики любят капусту;

j) некоторые книги интересны;

k) все матери ласкают своих детей.

Составьте отрицание этих высказываний

70. Попробуйте продолжить, если это возможно, высказывания:

a) никакое млекопитающее не может дышать жабрами. Сазан не может дышать жабрами. Следовательно, ... ;

b) у всех людей есть недостатки. Все короли – люди. Следовательно ... ;

c) красные цветы не пахнут. Этот цветок не пахнет. Следовательно ... ;

d) волки питаются овцами. Это животное ест овцу. Следовательно ... ;

e) все планеты – небесные тела. Луна – не планета. Следовательно...;

f) все металлы хорошо проводят электрический ток. Золото – металл. Следовательно.... ;

g) все птицы несут яйца. Все птицы – позвоночные животные. Следовательно....;

h) если у человека высокая температура, то он болен. У этого человека высокая температура. Следовательно...;

i) если у человека высокая температура, то он болен. Этот человек не болен. Следовательно....

71. Пусть $P(x,y)$: x – родитель y. Выразите высказывания на естественном языке:

a) $\exists z P(x,z) \land P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. Пусть $F(x,y)$: x считает y своим другом. Выразите высказывания на естественном языке:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(y,x)$; d) $\forall x \exists y F(y,x)$;

b) $\forall x \exists y F(x,y)$; e) $\exists y \forall x F(y,x)$;

c) $\exists y \forall x F(x,y)$; f) $\forall y \exists x F(x,y)$; g) $\exists x \forall y F(y,x)$.

73. Пусть $D(m,n)$: целое число n делится на m. Какое из высказываний истинно?

a) $\forall m \forall n D(m,n)$; d) $\exists n \forall m D(n,m)$;

b) $\forall n \exists m D(m,n)$; e) $\forall n \exists m D(n,m)$;

c) $\exists m \forall n D(n,m)$; f) $\exists m \forall n D(n,m)$,

74. Какое из высказываний истинно?

Приведите соответствующие примеры.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) существует число меньшее всех остальных;

c) если $\forall x \exists y P(x,y)$, то $\exists y \forall x P(x,y)$.

14-15 ЗАКОНЫ ПРАВИЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ (АРГУМЕНТАЦИИ). СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ

В процессе познания действительности мы приобретаем новые знания. Некоторые из них непосредственно, в результате воздействия предметов внешнего мира на органы чувств. Но большую часть знаний мы получаем путем выведения новых знаний из знаний уже имеющихся. Чтобы научиться стройно и последовательно излагать свои мысли, правильно делать выводы, необходимо пользоваться законами логики. Определенность, непротиворечивость, последовательность и обоснованность являются обязательными качествами правильного мышления. Законы логики устанавливают необходимые связи в последовательном ряду мыслей и умозаключений.

Суждение представляет собой форму мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предметах, их свойствах или отношениях. Например, в суждении «Железо–металл» утверждается связь между предметом (железо) и его признаком (являться металлом). В суждении «Яйцо появилось раньше курицы » утверждается связь между двумя предметами (яйцо и курица). Так как суждение выражается в форме повествовательного предложения, причем суждение может быть либо истинным, либо ложным, то каждое суждение имеет форму высказывания.

Умозаключение– это такая форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений, называемых *посылками*, по определенным правилам получается некоторое суждение, называемое *заключением* или *выводом.*

Пусть S – совокупность исходных суждений (посылок), P – заключение. В этом случае, умозаключение имеет логическую форму вида $S \Rightarrow P$. Совокупность высказываний S будем называть основанием, а высказывание P– следствием. Основание и следствие будем связывать словом «следовательно» и отделять горизонтальной чертой: $\dfrac{S}{P}$. Рассмотрим простой пример.

Если Собир занимается спортом, то будет здоров. Собир занимается спортом. Следовательно, Собир будет здоров.

Найдем логическую форму этого умозаключения.

Пусть p: Собир занимается спортом; q: Собир будет здоров.

Тогда умозаключение имеет вид:

$$\frac{\left.\begin{array}{r} p\Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{основание}}{q \quad \} \textit{ следствие}}$$

Так следствие вытекает из суждений $p\Rightarrow q$ и p, то умозаключение имеет следующую логическую форму $(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$.

Составим соответствующую таблицу истинности:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Получили тавтологию. Это показывает ***правильность*** умозаключения, то есть мы из данного основания получили правильное следствие.

Пример 1. Покажите неправильность умозаключения:

Если треугольник имеет три стороны, то 2+4=7.

Следовательно, треугольник имеет три стороны.

△ Найдем логическую форму этого умозаключения.

p: треугольник имеет три стороны.

q: 2+4=7

Имеем:

$$\frac{\left.\begin{array}{r} p\Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{основание}}{q \quad \} \textit{ следствие}}$$

▲

Так как здесь из $p\Rightarrow q$ и p следует q, то наше умозаключение имеет логическую форму $p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$.

Составим соответствующую таблицу истинности:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

В результате мы не получили тавтологию. Это показывает ***неверность*** умозаключения, то есть мы из данного основания не получили правильное следствие.

Ниже мы приведем некоторые правила правильных умозаключений:

П.н.	Рассуждение	Смысл	Пример
1°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$	Если верно p, то верно и q. При этом p верно. Следовательно, *q верно.*	Если я почитаю учебник, я получу отличную оценку. Я прочел учебник. Следовательно, я получу отличную оценку.
2°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$	Если верно p, то верно и q. Однако q неверно. Следовательно, p тоже неверно	Если я почитаю учебник, я получу отличную оценку. Я не получил отличную оценку. Следовательно, я не прочел учебник.
3°.	$\begin{array}{c} p\vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$	Пусть верно p или q. При этом p неверно. Следовательно, q верно.	Я либо прочту книгу, либо просмотрю фильм. Книгу я не буду читать. Следовательно, просмотрю фильм.
4°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ q\Rightarrow r \\ \hline p\Rightarrow r \end{array}$	Пусть из p следует q, а из q следует r. Тогда из p следует r.	Если будет солнечно, то я пойду на спортплощадку. Если я пойду на спорплощадку, то я буду играть в футбол. Следовательно, если будет солнечно, то я буду играть в футбол.

Доказательство верности вышеуказанных умозаключений мы оставляем учащимся в качестве упражнения.

Упражнения

75. Рассмотрим умозаключение:

Когда Али простужается, у него повышается температура тела.

Температура тела Али не повысилась.

Следовательно, Али не простудился.

a) напишите логическую форму умозаключения;

b) докажите его правильность.

76. Напишите логическую форму умозаключений:

a) **I** $\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$ **II** $\begin{array}{c} p\vee q \\ \neg p \\ \hline \mathrm{q} \end{array}$ **III** $\begin{array}{c} p\vee q \\ \hline p \end{array}$ **IV** $\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$ **V** $\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ q\Rightarrow p \\ \hline \mathrm{p} \end{array}$

b) составьте для каждого случая таблицу истинности и выясните, какие из умозаключений правильные;

c) приведите соответствующие примеры выражения средствами естественного языка.

77. Выпишите высказывания в виде умозаключения:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
b) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$;
c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$;
d) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee p)$.

Какие из них истинны?

78. Пусть p: x – простое число и q: x –нечетное число.
Какие из выводов сделаны правильно?

a) Если x – простое число, то оно нечетно. x –простое или нечетное число. Следовательно, x – нечетное число;

b) x – нечетное или простое число, но не одновременно. x – нечетное число. Следовательно, x – простое число.

79. Рассмотрим умозаключение: чтобы участвовать в соревновании, Даврон поедет либо в Сингапур, либо в Гонгконг. Стало известно, что Даврон едет в Сингапур. Следовательно, Даврон не поедет в Гонгконг.

a) при помощи таблицы истинности докажите, что это умозаключение неправильное;

b) объясните, почему оно неправильно?

80. Какие из умозаключений правильны, а какие неправильны:

a) Талиб в 10.00 пойдет либо в кино либо в театр. В 10.00 Талиб не пошел в кино. Следовательно, Талиб в 10.00 пошел в театр;

b) Если число x кратно 4, то оно четно. x – четно, следовательно, оно кратно 4;

c) Число x либо делит 30, либо делит 50. Следовательно, x делит 50;

d) Если последовательность не является арифметической прогрессией, то она является геометрической прогрессией. Следовательно, последовательность является либо арифметической либо геометрической прогрессией;

e) Все мои одноклассники хорошо учатся. Махсум учится хорошо. Следовательно, Махсум мой одноклассник.

81. Продолжите умозаключения:

a) Кто-то из нас двоих сейчас зайдет на прием стоматолога.
Я точно не зайду. Следовательно ... ;

b) Либо я пойду в школу, либо меня мама сильно будет ругать. Сегодня я точно в школу не пойду. Следовательно ... ;

c) Если я верно решу задачу, полученный мой ответ совпадет с ответом в учебнике. Мой ответ отличен от ответа, данного в учебнике. Следовательно ... ;

d) Если Генри женат, то его собственность унаследует жена. Если не женат, то его собственность унаследует брат.

Следовательно,его собственность унаследует ... ;

e) Либо поезд опаздывает, либо его отменили. Если его отменили, то я сегодня никуда не поеду. Если он опаздывает, то я не смогу вовремя попасть на работу. Следовательно, я ... ;

f) Если 2 – простое число, то это наименьшее простое число. 2 – простое число. Следовательно ... .

СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ

Софизмы[2] – представляют собой преднамеренные, сознательно совершаемые ошибки, рассчитанные на то, чтобы выдать ложь за истину, тем самым вводя человека в заблуждение.

Одним из первых соответствующие примеры привел математик Зенон, живший в 5 веке до нашей эры в Древней Греции. Например, Зенон «доказал», что быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху, если в начале движения она находится впереди Ахиллеса. Приведем его рассуждения. Допустим, Ахиллес бежит в 10 раз быстрее, чем черепаха, и находится позади нее на расстоянии в 100 шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползет 10 шагов.

За то время, за которое Ахиллес пробежит 10 шагов, черепаха проползет еще 1 шаг, и так далее. Процесс будет длиться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

Примеры Зенона связаны с понятиями бесконечности и движения, которые имели большое значение в развитии физики и математики.

Некоторые софизмы обсуждали в переписке между собой наши великие соотечественники Беруни и Ибн Сино, а также они встречаются в произведениях Фараби.

Приведем простейшие примеры на софизмы и обсудим их.

Пример 1. *Куда пропали 1000 сум?* Три друга отобедали в кафе, после чего официант дал им счет на 25000 сум. Каждый из трех друзей достал по купюре в 10000 сум, в итоге они отдали официанту 30000 сум. На сдачу официант отдал 5000 сум более мелкими купюрами. Друзья взяли по 1000 сум себе, а оставшиеся 2000 сум отдали другу на такси. Один из друзей стал рассуждать: "Каждый из нас потратил по 9000 сум, что в итоге составляет 27000 сум. Затем 2000 сум отдали на такси, значит, в итоге получается 29000 сум. Куда пропали 1000 сум?"

△ Основной «подвох» в этом рассуждении заключается в том, что

2 От древнегреческого уловка.

расчеты сделаны неверно. Действительно, трое друзей сложились по 9000 сум и получили 27000 сум. Из этих денег 25000 сум заплатили за обед, а 2000 сум заплатили за такси. Следовательно, общая трата составила 27000 сум. Те 2000 сум находятся внутри 27000 сум. ▲

Пример 2. *"2·2=5":* Упростим верное равенство: 20−16−4=25−20−5

2(10−8−2)=25−20−5

2·2·(5−4−1)=5·(5−4−1)

Сократим левую и правую часть последнего равенства на общий делитель (5–4–1). В итоге получим равенство 2·2=5.

△ Основной «подвох» в этом рассуждении заключается в том, что мы поделили обе части равенства 2·2·(5−4−1)=5·(5−4−1) на нуль. ▲

Парадокс[3] – странное мнение, высказывание, расходящееся с общепринятыми мнениями, научными положениями, а также мнение, противоречащее здравому смыслу. Сам термин «парадокс» использовался в античной философии для обозначения всякого странного, оригинального мнения.

Парадоксы, обычно, возникают в теориях, логические основы которых не определены полно.

Пример 3. *Парадокс лжеца.* Рассмотрим высказывание "То, что я утверждаю сейчас – ложь".

△ Если это высказывание истинно, значит, исходя из его содержания, верно то, что данное высказывание –ложь. Но если оно –ложь, тогда неверно то, что оно утверждает, то есть утверждение о ложности данного высказывания неверно, значит, данное высказывание истинно. Таким образом, цепочка рассуждений возвращается в начало. ▲

Пример 4.

Прилагательное русского языка назовем *рефлексивным*, если оно обладает свойством, которое определяет.

Например, прилагательное «русский» – рефлексивное, а прилагательное «английский» – нерефлексивное, прилагательное «трехсложный» – рефлексивное (это слово состоит из трех слогов), а прилагательное «четырехсложный» – нерефлексивное (состоит из пяти слогов). Вроде бы ничто не мешает нам определить множество {все рефлексивные прилагательные}. Но давайте рассмотрим прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

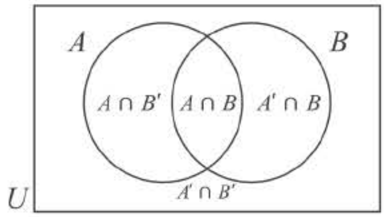
△ Можно заявить, что прилагательное «нерефлексивный» не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным. Действительно, если это слово рефлексивное, то по своему смыслу, оно нерефлексивное. Если же это

3 От древнегреческого παράδοξος – неожиданный, странный.

слово нерефлексивное, то, в силу того, что оно обладает свойством, которое определяет, оно является рефлексивным. Противоречие. ▲

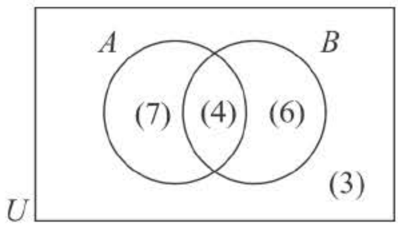
16-18 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Два взаимно пересекающихся множества A, B делят универсальное множество на четыре части:



△Следовательно, число элементов универсального множества является суммой количеств элементов этих частей.

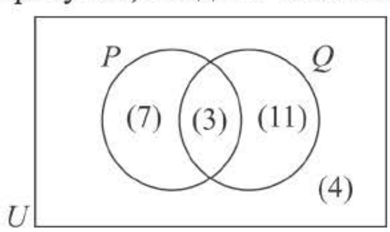
На следующей диаграмме мы заключили известные количества элементов частей универсального множества в круглые скобки:



Здесь, например, обоим множествам A, B принадлежат 4 элемента, а 3 элемента не принадлежат ни одному из них.

Так как произвольный элемент множества U, принадлежит только одному из этих 4 частей , то число элементов множества U равно 7+4+6+3=20.▲

Задача 2. Используя рисунок, найдите число элементов следующих множеств:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) Множество элементов, принадлежащих P, но не принадлежащих Q;

e) Множество элементов, принадлежащих Q, но не принадлежащих P;

f) Множество элементов, не принадлежащих ни P, ни Q.

a) $n(P)$=7+3=10; b) $n(Q')$=7+4=11; c) $n(P \cup Q)$=7+3+11=21;

d) $n(P$, но не $Q)$=7; e) $n(Q$, но не $P)$=11.

Задача 3. Если $n(U)$=30, $n(A)$=14, $n(B)$=17 и $n(A \cap B)$, то

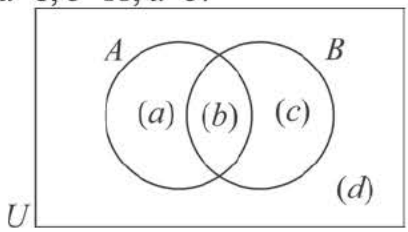
a) Найдите $n(A \cup B)$;

b) Сколько элементов содержит множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B?

Составим диаграмму Венна:

Из того, что $n(A \cap B)$ =b; $n(A)$ следует $b+c$=17; из $n(U)$ $a+b+c+d$=30;

Следовательно, b=6, a=8, c=11, d=5.



Из диаграммы получаем следующее:

a) $n(A \cup B)$=$a+b+c$=25;

b) Число элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B, равно a=8

Упражнения

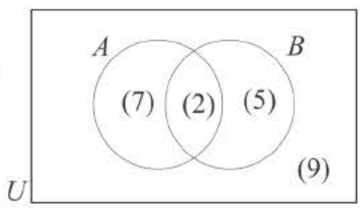
Используя диаграмму, найдите число элементов множества:

82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;

d) Множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B;

e) Множество элементов, принадлежащих B, но не принадлежащих A;

f) Множество элементов, не принадлежащих ни A, ни B.

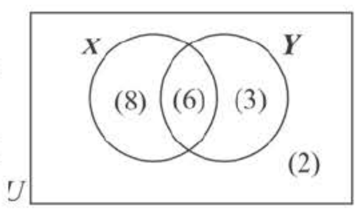


83. a) X'; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;

d) Множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих Y;

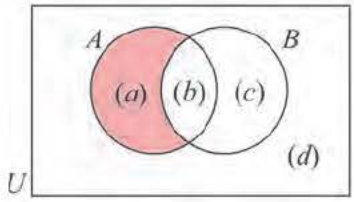
e) Множество элементов, принадлежащих B , но не принадлежащих X;

f) Множество элементов, не принадлежащих ни X, ни Y.



84. Найдите:

a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



85. Пусть $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ и $n(A \cap B)=8$:

a) Найдите $n(A \cup B)$;

b) Сколько элементов содержит множество элементов, принадлежащих B, но не принадлежащих A?

86. Пусть $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ и $n(M \cap N)=5$;

Найдите: a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$.

87. Пусть $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ и $n(R \cup S)=48$:

a) Найдите $n(R \cap S)$;

b) Сколько элементов содержит множество элементов, принадлежащих S, но не принадлежащих R;

Пример 4. Из 27 учеников, посещающих спортивную секцию, 19 имеют темные волосы, 14 – черные глаза, а 11 имеют и темные волосы и черные глаза одновременно.

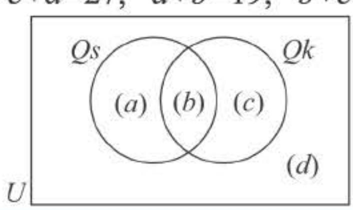
a) Изобразите эту информацию с помощью диаграммы Венна. Объясните ситуацию.

b) Найдите число учеников, которые **I** имеют или темные волосы или черные глаза; **II** темноволосых, но не черноглазых?

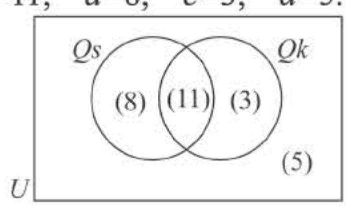
△ a) Пусть Qs – множество темноволосых, а Qk множество черноглазых учеников.

Изобразим ситуацию на диаграмме:

Имеем:
$a+b+c+d=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;



То есть,
$b=11$; $a=8$; $c=3$; $d=5$.



b) Используя диаграмму, определим следующее:

I количество учеников, имеющих или темные волосы или черные глаза: $n(Qs \cap Qk)=8+11+3=22$;

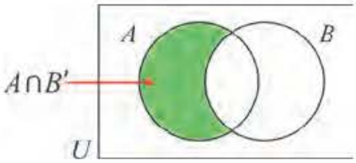
II количество темноволосых учеников, не обладающих черными глазами: $n(Qs \cap Qk')=8$. ▲

Упражнения

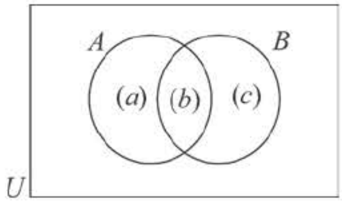
88. Из 41 члена секции бадминтона 31 член играет индивидуально, а 16 – в паре. Сколько членов играют и индивидуально, и в паре?

89. На предприятии трудятся 56 рабочих. В течение одной недели 47 из них работали в дневную, а 29 – в ночную смену. Сколько рабочих работали и в дневную, и в ночную смену?

90. Используя диаграмму Венна, покажите, что равенства
$n(A \cap B')= n(A)–n(A \cap B)$,
$n(A' \cap B)= n(B)–n(A \cap B)$ верны.



91. Используя диаграмму Венна, покажите, что равенство
$n(A \cup B) = n(A)+n(B)–n(A \cap B)$ верно.

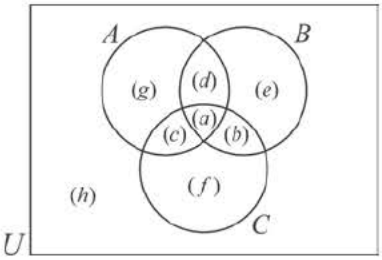


92. Из 50 студентов 40 изучают английский язык, а 25 – немецкий. Сколько студентов изучают оба языка?

Задача 4. На футбольном соревновании город представляют три команды *A, B* и *C*. 20 процентов населения города болеют за команду *A*, 24 процента – за *B*, 28 процентов – за *C*. 4 процента жителей болеют и за *C* и за *A*, 5 процент, жителей болеют и за *B* и за *A*, а 6 процентов жителей болеют и за *B* и за *C*. Кроме того, 1 процент населения болеет за все три команды. Сколько процентов жителей:

a) болеют только за команду *A*;
b) болеют и за *A* и за *B*, но не болеют за команду*C*;
c) не болеют ни за одну из команд?

△ Заполним для начала соответствующую диаграмму Венна.



$a=1$, так как 1 процент жителей болеет за все команды.

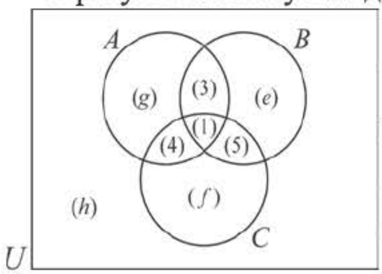
$a+d=4$, так как 4 процента жителей болеет и за *A* и за *B*.

$a+b=6$, так как 6 процентов жителей болеют и за *B* и за *C*

$a+c=5$, так как 5 процентов жителей болеют и за B, и за C.

Следовательно, d=3, b=5, c=4.

В результате получим диаграмму:



Кроме того, так как 20 процентов жителей болеют за команду A то g+1+4+3=20, то есть g=12.

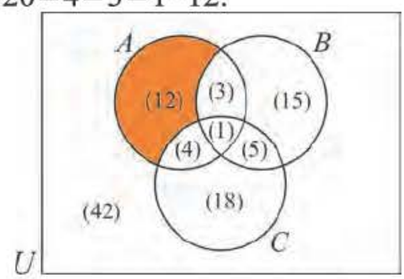
Точно также, так как 24 процента жителей болеют за команду B, то e+1+5+3=24, то есть e=15.

И наконец, так как 28 процентов жителей болеют за команду C, то f+1+5+4=28, то есть f=18.

В силу того, что население города составляет 100 процентов, число жителей, которые не болеют ни за одну из команд равно h=42.

Перейдем к решению задачи.

a) закрасим область, соответствующую жителям, болеющим только за команду A, и найдем: g=20 – 4 – 3 – 1=12.



b) количество жителей, которые болеют и за A, и за B, но не болеют за команду C, равно 12+3+15=30;

c) количество жителей, которые не болеют ни за одну из команд, равно h=42.

Упражнения

93. 58 участников международной конференции владеют разными языками, в частности, 28 участников – арабским, 27 – китайским, 39 – английским.
Сколько участников
a) владеют только китайским;
b) не владеют ни одним из вышеуказанных языков;
c) не владеют ни арабским, ни китайским?

94. Составьте отрицание высказывания:
a) солнечно и жарко;
b) если будет безоблачно, то я пойду на речку;

c) дождь не идет;

d) я либо буду готовиться к контрольной, либо не смогу ее хорошо написать;

e) некоторые ученики талантливы;

f) все ученики талантливы;

g) нет талантливых учеников;

h) у некоторых учеников глаза голубые.

Запишите высказывания с помощью знаков логических связок (**95–104**):

95. Если ученик усвоит математику, у него будет развито логическое мышление.

96. Если я усвою математику и иностранный язык, то я буду отдыхать либо дома, либо в горах.

97. Неверно, что начались каникулы.

98. Если человек с юношеского возраста способен управлять собою, то окружающие не будут его игнорировать, а будут его уважать.

99. Если через металл пропустить электрический ток, то его температура повысится.

100. Он поедет либо на такси, либо поездом.

101. Для изготовления этого изделия использовали либо черный, либо цветной металл.

102. Для начала каникул достаточно окончания четверти.

103. Для начала каникул необходимо окончание четверти.

104. Для начала каникул необходимо и достаточно окончание четверти.

Запишите высказывание при помощи логических связок. Определите истинность или ложность (**105–117**):

105. Если человек психически нездоров, он не узнает своих близких. Этот человек психически нездоров. Следовательно, что он не узнает своих близких.

106. Если я тебе поверю, ты меня обманешь. Значит, если я тебе не буду верить, то ты меня не обманешь.

107. Завтра мы посетим либо театр, либо музей. Если мы пойдем в театр, то домой мы придем затемно. Если пойдем в музей, то домой мы придем пораньше. Однако домой нам поздно возвращаться нельзя. Значит мы пойдем не в театр, а в музей.

108. Если он – отец Алишера, то он не может быть отцом Мурада. Неверно, что он отец и Алишера и Жамшида. Оказалось, что он отец либо Жамшида, либо Мурада. Следовательно, он не отец Алишера.

109. Если сейчас зима, то температура будет низкой. Если сейчас не осень, то значит, сейчас зима. Сейчас осень. Следовательно, температура не будет низкой.

110. Если Пулат не будет любопытным, то он не сможет стать журналистом. Если Пулат будет журналистом, то он не будет учителем. Пулат очень любопытен, и в то же время он не учитель. Следовательно, Пулат– журналист.

111. Если идет дождь, то небо покрыто тучами. Если туч нет, то солнечно. Несмотря на то, что идет дождь, солнечно. Следовательно, если солнечно, то небо не будет покрыто тучами.

112. Если Мурад еще раз превысит скорость, у него заберут документы на право вождения. Если Мурад сядет за руль в состоянии опьянения, то он не превысит скорость. Сегодня Мурад не пил и не превысил скорость. Следовательно, сегодня его документы не заберут.

113. Не знающие таблицу умножения считаются безграмотными. Не знающие алфавита тоже считаются безграмотными. Он не знает либо алфавита, либо таблицы умножения. Следовательно, он безграмотен

114. Если он прав, то я должен у него попросить прощения. Если я прав, то он должен у меня попросить прощения. Кто-то из нас обязательно попросит прощения. Следовательно, один из нас прав.

115. Либо я пойду в школу, либо меня мама сильно будет ругать. Сегодня я точно в школу не пойду. Следовательно, меня мама сильно будет ругать.

116. Если я верно решу задачу, полученный мной ответ совпадет с ответом в учебнике. Мой ответ отличен от ответа, данного в учебнике. Следовательно я решил задачу неверно.

117. Либо предмет не сложный, либо ему хорошо учат. Если предмет не сложный, то я его усвою. Если предмету хорошо учат, то я его тоже усвою. Значит, в любом случае я усвою этот предмет.

118. При помощи таблицы истинности определите тип высказывания. Приведите примеры средствами естественного языка.

a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$;
b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$;
c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$;
d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;
f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$.

Напишите высказывания, пользуясь логическими связками. Определите истинно или ложно высказывание **(119-130).**

119. Все дельфины – млекопитающие. Ни одна рыба – не млекопитающее. Следовательно, ни одна рыба – не дельфин.

120. Все коровы – млекопитающие. Каждая корова ест сено. Следовательно, некоторые млекопитающие едят сено.

121. Некоторые студенты работают и некоторые студенты хорошо учатся. Следовательно, некоторые хорошо учащиеся студенты работают.

122. Все металлы – твердые вещества. Ртуть – металл. Следовательно, ртуть – твердое вещество.

123. Ни один металл – не газ. Некоторые вещества – металлы. Значит, некоторые вещества не газы.

124. Все металлы хорошо проводят тепло. Все металлы хорошо проводят электричество. Следовательно, некоторые электрические проводники хорошо проводят тепло.

125. Некоторые мужчины – математики. Некоторые математики – философы. Следовательно, некоторые философы – мужчины.

126. Некоторые альпинисты бесстрашны. Некоторые альпинисты – мужчины. Следовательно, некоторые мужчины бесстрашны.

127. Некоторые ученые талантливы. Некоторые талантливые люди – красноречивы. Значит, некоторые красноречивые люди – ученые.

128. Все учителя иностранных языков хорошо знают иностранный язык. Некоторые, хорошо знающие иностранный язык, не любят математику. Следовательно, некоторые, любящие математику, не преподают иностранный язык.

129. Все кроманьонцы агрессивны. Ни один неандерталец – не кроманьонец. Следовательно, ни один неандерталец не агрессивен.

130. Некоторые млекопитающие – киты. Все киты – крупные животные. Следовательно, некоторые крупные животные – млекопитающие.

Прочитайте текст и обсудите ситуацию (**131–138**):

131. Философ-критянин Епименид утверждает, что все критяне говорят только неправду. Прав ли Епименид?

132. Платон: Все, что говорит Сократ – ложь.
Сократ: Платон сказал неправду.
Кто сказал правду?

133. На одной стороне листа бумаги написано: "То, что написано на другой стороне бумаги – ложь ". На другой стороне листа бумаги написано: "То, что написано на другой стороне бумаги – ложь ". На какой стороне бумаги написана правда?

134. Знаменитый философ Протагор взялся обучать Эватла бесплатно праву. Однако они составили договор, заключающийся в том, что если Эватл выиграет свое первое судебное заседание, то он заплатит Протагору некоторую сумму денег.

После окончания обучения Эватл не выходил некоторое время на работу. В результате, было не ясно, будет ли Эватл участвовать на своем первом судебном заседании. Поэтому Протагор подал в суд на своего ученика. Приведем отрывок из судебного процесса:

Протагор. Этот парень должен заплатить мне в любом случае. Действительно, если он выиграет в этом суде, то он заплатит мне согласно договору. Если проиграет, то он мне заплатит согласно решению суда.

Еватл. Я ничего не дам Протагору! Если я выиграю этот суд, то в качестве победившего я ему ничего не должен буду платить. Но я даже готов проиграть! В этом случае я ему не буду платить согласно условиям договора.

135. В этом интересном предложении всего семь слов.

136. Это предложение читать запрещено.

137. Некоторый человек, продавая попугая, убедил покупателя, что его попугай, услышав любое слово на любом языке, тут же повторит его. Однако купленный попугай не произнес ни единого слова. Известно, что продавец не солгал покупателю. Как такое может быть?

138. У Дониера больше 1000 книг.

Нет, у него меньше 1000 книг.

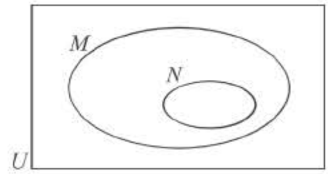
У него есть, по крайней мере, одна книга.

Известно, что из этих трех высказываний ровно одно истинно. Сколько книг у Дониера?

Задания на контрольную работу
Вариант I

1. Пусть $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
A = {все четные числа между 0 и 9},
B = {натуральные делители 18}.
Найдите элементы множества $A \cap B$.

2. Перерисуйте диаграмму в тетрадь и отметьте множество $M \cap N$.



3. Рассмотрим высказывания p: x — четное число, q: x делится на 3. Выразите следующие высказывания средствами естественного языка. При каких x они истинны? Ложны?
 a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

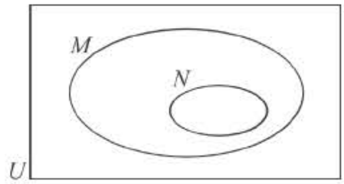
4. Какие из высказываний логически равносильны?
 a) $p \Rightarrow q$ и $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ и $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Напишите логическую форму рассуждения. Проверьте его правильность. Если будет облачно, то я надену свою шляпу. На небе облака. Следовательно, я надену свою шляпу.

Вариант II

1. Пусть $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, A = {все четные числа между 0 и 9}, B = {натуральные делители 18}.
Найдите элементы множества $(A \cap B)'$.

2. Перерисуйте диаграмму в тетрадь и отметьте множество $M \cap N'$.



3. Рассмотрим высказывания p: x – четное число, q: x делится на 3. Выразите следующие высказывания средствами естественного языка. При каких x они истинны? Ложны?
 a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Какие из высказываний логически равносильны?
 a) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ и $q \Rightarrow p$.

5. Напишите логическую форму рассуждения. Проверьте его правильность. Все учителя увлекаются наукой. Муаззам Алимова не учитель. Значит, Муаззам Алимова не увлекается наукой.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

19-21 ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Когда определенная сумма дается в долг, заимодавец (кредитор, инвестор) и берущий в долг (заемщик) договариваются о погашении долга частями в течении определенного периода времени (продолжительности займа).

Кроме того, заемщик обязуется выплачивать кредитору проценты – дополнительные денежные средства в качестве вознаграждения.

Ясно, что денежная сумма, выплачиваемая кредитору заемщиком, зависит от суммы долга, периода выплаты этого долга, а также процентной ставки, назначенной кредитором с целью получения дополнительной выгоды (дохода).

Для вычисления процента кредитору обычно применяют два способа: метод ***простых процентов*** и метод ***сложных процентов.***

Простые проценты

Простые проценты – это проценты, начисленные только на сумму первоначального долга, независимо от срока продолжительности займа.

Рассмотрим случай, когда 2 000 000 сум взяты в долг сроком на 3 года под 17% годовых, (то есть с обязательством выплачивать проценты по ставке простых процентов, равной 17% в год).

Тогда после первого года необходимо дополнительно выплатить: $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000$ сум, а после трех лет $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 1\,020\,000$ сум.

В общем случае имеет место соотношение, называемое **формулой простых процентов**:

$$I=\frac{Crn}{100},$$

Здесь C – первоначальная сумма долга, I – выплачиваемый кредитору процент, r – годовая процентная ставка, n – *число лет.*

Пример 1. Заемщик взял в долг 8 000 000 сум под 7% годовых на 18 месяцев. Вычислить процент, который необходимо выплатить заемщику.

△ $C = 8000000, \quad r=7, \quad n=\frac{18}{12} = 1{,}5$ года.

Следовательно, $I=\frac{Crn}{100}=\frac{8000000\cdot 7\cdot 1{,}5}{100} = 840\,000$ сум. ▲

Пример 2. Кредитор назначил процентную ставку в 8% годовых. Предприниматель в течение 4 лет возвращает заем и при этом платит за пользование капиталом 1600 долларов США дополнительно. Какая сумма была взята в долг предпринимателем?

△ По формуле простых процентов

$I=\frac{Crn}{100}$, здесь I=1600; r=8; n=4.

Следовательно, $1600 = \frac{C\cdot 8\cdot 4}{100}$.

Отсюда C=5000 долларов США. ▲

Пример 3. Банк выдал кредит 4000 долларов США. За 18 месяцев банк получил доход 900 долларов США. Чему равна годовая процентная ставка?

△ По формуле простых процентов

$I=\frac{Crn}{100}$, здесь I=900; n=18 месяцев =1,5 года, C=4000.

Следовательно, $900 = \frac{4000\cdot r\cdot 1{,}5}{100}$.

Отсюда, r=15%. ▲

Пример 4. Первоначальная сумма кредита равна 2000 долларов США. Через несколько лет было выплачено 3000 долларов США и долг был погашен. Найдите, сколько лет погашался долг, если кредит был выдан под 12,5% годовых?

△ Кредитор получил 3000–2000=1000 долларов США дохода.

По формуле простых процентов

$I=\frac{Crn}{100}$, здесь I=1000; C=2000; r=12,5.

Следовательно, $1000 = \dfrac{2000 \cdot 12,5 \cdot n}{100}$

Отсюда: 4 года.

Сложные проценты

Сложные проценты по кредиту – это способ расчета процентов, при использовании которого они начисляются на первоначальную сумму долга, а также на прирост долга, который начислен уже после первого начисления процентов. Для понимания метода сложных процентов перейдем к обсуждению следующего примера

Пример 5. Пусть кредитор дал в долг 6000 долларов США сроком на 3 года со сложной процентной ставкой 8% годовых, то есть каждый год полученный годовой процент в 8% вновь дается в долг. Какой доход получит кредитор?

Учитывая вышесказанное, вычислим сумму, выплачиваемую дополнительно каждый год:

Год	**Долг** (1)	**Выплата по процентам** $= \dfrac{Crn}{100}$ (2)	**Баланс** (1) + (2)
1	\$6000,00	$\$6000,00 \cdot \dfrac{8}{100} \cdot 1 = \$480,00$	\$6480,00
2	\$6480,00	$\$6480,00 \cdot \dfrac{8}{100} \cdot 1 = \$518,40$	\$6998,00
3	\$6998,00	$\$6998,00 \cdot \dfrac{8}{100} \cdot 1 = \$559,87$	\$7558,27

Следовательно, для того, чтобы погасить долг перед инвестором в 6000 долларов США и выплатить все проценты, необходимо 7558,27 долларов США.

При этом кредитор получит доход, равный $\$7558,27 - \$6000 = \$1558,27$. Этот доход называется ***начисленными сложными поцентами***.

Видно, что полученный доход равен разности полученного в последний год баланса и первоначальной суммы долга.

Метод сложных процентов можно применить, разбив период времени на полугодия, кварталы, месяцы и дни.

Пример 6. Пусть сумма 10000 долларов США дана в долг на год по годовой сложной процентной ставке в 6% . При это предполагается, что год разбит на кварталы. Какой доход получит кредитор?

△

Квартал	**Долг** (1)	**Выплата по процентам** $= \frac{Crn}{100}$ (2)	**Баланс** (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000{,}00 \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{4} = \$150{,}00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000{,}00 \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{4} = \$152{,}25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302{,}25 \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{4} = \$154{,}53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456.{,}78 \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{4} = \$156{,}85$	\$10613,63

Следовательно, чтобы погасить долг в 10000 долларов США нужно выплатить в течение года 10613,63 долларов США .

При этом кредитор получит доход 613,63 долларов США. ▲

Если в этом случае долг был выдан на несколько лет, итоговый баланс вычисляется следующим образом:

$$A = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

Здесь A – итоговый баланс, C – первоначальный долг, r – годовая процентная ставка, n – число лет.

Если долг был дан на n лет, причем выплаты процентов производятся k раз в году (например, в каждом полугодии, квартале, месяце и т.д.), то общая выплачиваемая сумма (итоговый баланс) вычисляется по формуле:

$$A = C\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}.$$

В обоих случаях, ***начисленные сложные проценты*** вычисляются по формуле:

$$I = A - C.$$

Решим пример 6 , опираясь на эту формулу:

$C=10000$, $r=6$, $n=1$, $k=4$.

$A=C\cdot\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$; $A=10000\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^4$; $A=10613{,}64$.

Следовательно, чтобы погасить долг в 10000 долларов США, нужно выплатить в течение года 10613,63 долларов США .

При этом кредитор получит доход 613,63 долларов США.

Если вкладчик помещает в банк C сум, который выплачивает ему каждый год проценты по ставке простых процентов, равной r, то через n лет банк выплатит вкладчику общую сумму, равную $a_n=C(1+\frac{nr}{100})$.

Если вкладчик помещает в банк C сум, который выплачивает ему каждый год проценты по ставке сложных процентов, равной r, то через n лет банк выплатит вкладчику общую сумму, равную $b_n=C(1+\frac{r}{100})^n$.

Ясно, что последовательность a_n – является арифметической, а последовательность b_n – геометрической последовательностью.

Упражнения

1. Вычислить процент, который необходимо выплатить заемщику, если:

a) сумма первоначального долга равна 3 000 фунтам стерлингов, годовая процентная ставка равна 7%, а долг был взят на 3 года;

b) 6100 долларов США взяты в долг под 5,9% годовых на срок 15 месяцев;

c) 800 000 японских йен взяты в долг под 6,5% годовых на срок 4 года 7 месяцев;

d) 250 000 евро взяты в долг под 4,8% годовых на срок 134 дня.

2. Пусть 130000 долларов США взяты в долг. В каком случае кредитор получит больше дохода:
если долг был взят под 7% годовых сроком на 5 лет,
или если долг был взят под 7,7% годовых сроком на 5,5 лет?

3. Кредитор назначил годовую простую процентную ставку в 7%. Предприниматель в течение 5 лет выплатил первоначальную сумму долга и дополнительные проценты 910 долларов США и полностью выполнил обязательства. Найдите первоначальную сумму долга.

4. Годовая простая процентная ставка равна 8% . За 3 года для погашения процента дополнительно была выплачена сумма 3456 фунтов стерлингов. Найдите первоначальную сумму долга.

5. Инвестор рассчитывает за 21 месяц получить доход 2300 евро. Какую сумму он должен инвестировать, если годовая простая процентная ставка равна 6,5%?

6. a) Кредитор дал в долг 4500 долларов США и за 3 года получил доход 900 долларов США. Чему равна годовая процентная ставка?

b) Кредитор дал в долг 170000 японских йен и за 2 года получил доход 170000 японских йен. Чему равна годовая процентная ставка?

7. За 8 месяцев была выплачена первоначальная сумма долга 9000 долларов США и, кроме того, дополнительно были выплачены проценты в размере 700 долларов США. Чему равна годовая процентная ставка?

8. Вкладчик положил на счет в банке 26 миллионов сум. Через 18 месяцев на его счету стало 32 миллиона сум. Чему равна годовая простая процентная ставка?

9. a) Кредитор предоставил кредит 20000 долларов США и получил доход 5000 долларов США. Если годовая простая процентная ставка равна 7%, на сколько лет был предоставлен кредит?

b) Кредитор предоставил кредит 1200 евро и получил доход 487 евро. Если годовая простая процентная ставка равна 6,75%, на сколько лет был предоставлен кредит?

10. Вкладчик положил на счет в банке 9400 фунтов стерлингов под 6,75% годовых. Сколько лет необходимо, чтобы получить 1800 фунтов стерлингов дохода?

11. Посчитайте итоговый баланс в следующих случаях:

a) Первоначальная сумма долга равна 4500 евро, годовая сложная процентная ставка равна 7%, период равен 3 годам;

b) Первоначальная сумма долга равна 6000 долларов США, годовая сложная процентная ставка равна 5%, период равен 4 годам;

c) Первоначальная сумма долга равна 7400 фунтов стерлингов, годовая сложная процентная ставка равна 6,5%, период равен 3 годам.

22-24 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Чтобы погасить долг 23000 долларов США, предприниматель решил выплачивать сумму не по годам, а по месяцам. Сколько он должен выплачивать ежемесячно, если долг был взят на 6 лет, а годовая процентная ставка равна 8%?

1 шаг. Вычислим проценты. Так как C=23 000, r=8%, n=6, то

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\cdot 8\cdot 6}{100}=\$11040.$$

2 шаг. Вычислим общую сумму выплат (наращенную сумму):

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3 шаг. Вычислим, сколько месяцев должна выплачиваться сумма:

$$6\cdot12=72 \text{ месяцев.}$$

4 шаг. Следовательно, каждый месяц необходимо выплачивать:

$$\frac{\$34040}{72}\approx\$472{,}78.$$

Задача 2. Долг 8800 евро был выдан под годовую сложную процентную ставку 4,5% . Найдите сумму дохода, полученного кредитором за 3,5 года.

$C=8800$, $r=4{,}5\%$, $n=3{,}5$, $k=12\cdot3\frac{1}{2}=42$

Следовательно, $A=C\cdot(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=8800\cdot(1+\frac{4.5}{1200})^{42}$,

$A=10298{,}08$, то есть $I=A-C=10298{,}08-8800=1498{,}08$.

Значит, за 3,5 года был получен доход €1498,08.

Задача 3. В банке был получен кредит 50000 долларов США под сложную процентную ставку 5,2% годовых с условием, что выплаты должны производиться каждый квартал. Сколько долларов США будет выплачено банку за 3 года?

$A=50000$, $r=5{,}2\%$, $n=3$, $k\cdot n=4\times3=12$

Следовательно, $A=C\cdot(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ $50000=C\cdot(1+\frac{5{,}2}{400})^{12}$

$C=42820{,}99$. Банку будет выплачено $42821 за 3 года.

За время использования основные средства и активы (здания и сооружения, техника, устройства и приборы, инвентарь и мебель, компьютеры и т.д.) устаревают и изнашиваются. Старение означает процесс постепенной потери полезных свойств.

Амортизация – это процесс периодического переноса начальной стоимости используемых средств и активов для возмещения их износа.

Для вычисления значения амортизации используется следующая формула: $A=C\cdot(1-\frac{r}{100})^n$, здесь A – значение амортизации после n периодов, C – первоначальная стоимость основных средств, r – норма амортизации (установленный годовой процент возмещения изношенной части основных средств), n – число периодов, например, годов.

Задача 4.

Строительное устройство закуплено за 2400 фунтов стерлингов. Найдите его стоимость через 6 лет , если норма амортизации равна 15%.

△ Имеем $A=C\cdot(1-\frac{r}{100})^n$, здесь $C=2400$, $r=15$, $n=6$.

Следовательно, $A=2400\cdot(1-0{,}15)^6$, $A=2400\cdot(0{,}85)^6$.

Значит, значение амортизации приблизительно равно 905,16 фунтов стерлингов. Поэтому стоимость устройства через 6 лет равна £2400 – £905,16 = £1494,84. ▲

Для приобретения товаров потребления (например: мебель, электронно-бытовая техника, компьютеры, автомобили и т.д.) или жилья население оформляет кредиты. Обычно такие кредиты выдаются на кратковременные периоды с начислением постоянных или изменяющимися с течением времени процентов. Для удобства расчетов без использования формулами мы приводим таблицу расчетов по кредитам (из расчета 1000 денежных единиц):

Месяцы	Годовой нарастающий процент						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

Задача 5. Потребитель взял кредит 9200 евро. Ему назначены годовая процентная ставка 12% и 3,5 года платежа. Сколько необходимо всего заплатить?

△ Из таблицы находим значение 29,2756 евро, соответствующее 42 месяцам и 1000 евро.

Следовательно, для 9200 евро каждый месяц должно выплачиваться

€9200 = €29,2756·9,2 = €269,33552 ≈ €269,340.

Всего должно быть выплачено = €269,40·42 = €11314,80. ▲

Упражнения

12. Сумма 10000 долларов США взята на 10 лет с годовой процентной ставкой 5,75%. Если выплаты производятся каждые полгода равными долями, чему равны их значения?

13. 15000 евро взяты в долг на 36 месяцев с годовой процентной ставкой 4,5%. Если выплаты производятся каждый квартал равными долями, чему равны их значения?

14. Человек взял кредит 8000 фунт стерлингов в банке на 3,5 лет с условием выплаты каждый месяц 230 фунтов стерлингов. Какая годовая процентная ставка была начислена?

15. 6800 долларов США были взяты в долг на 2,5 года с годовой процентной ставкой 8%. Если выплаты производятся каждый месяц равными долями, чему равны их значения?

16. Пусть

a) 950 евро были даны в долг по годовой сложной процентной ставке 5,7% на 2 года;

b) 4180 фунтов стерлингов были даны в долг по годовой сложной процентной ставке 5,75% на 3 года;

c) 237000 японских йен были даны в долг по годовой сложной процентной ставке 7,3% на 4 года.

Найдите начисленные сложные проценты в конце каждого периода.

17. Макс положил на банковский счет 8500 долларов США. Годовая сложная процентная ставка при этом равна 6%, причем банк обязуется переводить проценты на счет Макса каждый квартал. Сколько денег будет на счету Макса через 1 год?

18. Мария положила на банковский счет 24000 фунтов стерлингов. Годовая сложная процентная ставка при этом равна 5%, причем банк обязуется переводить проценты на счет каждый месяц. Сколько денег будет на счету Марии через 3 месяца?

19. Кредитор дал в долг на 3 года 45000 долларов США под 8,5 процентов годовых. Сравните доходы кредитора, если проценты начислялись

a) по методу простых процентов;

b) методу сложных процентов каждое полугодие;

c) по методу сложных процентов каждый месяц.

20. Офисная мебель была приобретена за 2500 евро. Известно, что норма амортизации таких активов равна 15%. Перепишите в тетрадь и заполните таблицу.

Год	Амортизация	Стоимость
0		€2500
1	$15\% \cdot €2500 = €375$	
2		
3		

21. Для покупки мебели был взят кредит 1200 долларов США по годовой процентной ставке 8% сроком на 5 лет. Какая сумма должна выплачиваться каждый месяц? Какая всего сумма должна будет выплачена? Воспользуйтесь таблицей расчетов по кредитам.

22. Для ремонта квартиры было взято в кредит 14000 долларов США по годовой процентной ставке 11% сроком на 4 года. Какая сумма должна выплачиваться каждый месяц? Какая всего сумма должна будет выплачена? Воспользуйтесь таблицей расчетов по кредитам.

Контрольные задания

1. Банк назначил годовую процентную ставку 14%. Предприниматель за 5 лет погасил первоначальную сумму долга и дополнительно выплатил 16000000 сум по процентам. Какая сумма была взята в долг?
2. Вкладчик положил на счет в банке 20000000 сум. За 15 месяцев он получил доход 900000 сум. Чему равна годовая процентная ставка, если выплата процентов была произведена на руки каждый год?
3. В долг на год было взято 20000000 сум по годовой сложной процентной ставке 6% с условием, что выплаты будут производиться ежеквартально. Какой доход получит кредитор?
4. Джон взял ипотечный кредит на 5 лет в размере 25000 долларов США на покупку дома. Годовая сложная процентная ставка равна 8%. Сколько он должен выплачивать в месяц, если выплаты производятся ежемесячно? Какой доход получит кредитор?
5. Устройство было куплено за 45000 долларов США. За 2 года 3 месяца эксплуатации в результате износа его стоимость была оценена в 8500 долларов США. Найдите амортизационную норму устройства.

Глава III

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

25-28 ПРОСТЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Если все решения одного уравнения также являются решениями второго, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Если множества решений двух уравнений совпадают, то эти уравнения называются равносильными.

Пример 1. Равносильны ли уравнения?

1) $x+2=3$ и $x+5=6$; 2) $\frac{x^2+x}{x-1}=0$ и $\frac{x+1}{x-1}=0$.

△ 1) Оба уравнения имеют общий корень: x=1. Так как они не имеют других корней, то они являются равносильными.

2) Первое уравнение имеет корень, равный 0. Второе же уравнение такого корня не имеет. Значит, данные уравнения не равносильны. ▲

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены переменной x.

Выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональным*.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – рациональные выражения. Уравнение вида $A(x)=B(x)$ называется *рациональным*.

Рассмотрим сначала простейшее рациональное уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad \textbf{(1)}.$$

Известно, что дробь $\frac{m}{n}$ равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля (на нуль делить нельзя!). Значит, для того, чтобы решить уравнение (1) , необходимо и достаточно найти все значения неизвестной *x,* для которых одновременно выполнены условия $Q(x)\neq0$ и $P(x)=0$.

Для краткости, это мы будем записывать так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\dfrac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

△ 1) Уравнение $x^2–2x+1=0$ имеет единственное решение $x=1$. При $x=1$ знаменатель отличен от нуля. Значит, данное уравнение тоже имеет единственное решение $x=1$.

2) Квадратное уравнение $x^2–2x+3=0$ не имеет корней, так как $D=1–3=–2<0$. Значит, данное уравнение тоже не имеет корней.

3) Для квадратного уравнения $2x^2–5x+3=0$.
$D=b^2–4ac=(–5)^2–4\cdot2\cdot3=25–24=1>0$, Значит, это уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{4}; \qquad x_1=\frac{5-1}{4}=1; \qquad x_2=\frac{5+1}{4}=1,5.$$

Однако число 1,5 обращает знаменатель выражения $\dfrac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ в нуль, а число 1 – нет. Значит, данное уравнение имеет единственное решение $x=1$.

4) Уравнение $(x–1)^2(x+2)=0$ имеет два корня 1 и –2. Однако число 1 обращает знаменатель $(x–1)$ в нуль, а число –2 – нет. Значит, данное уравнение имеет единственное решение $x=–2$. ▲

В случае, когда хотя бы одно из выражений $A(x)$ и $B(x)$ представимо в виде суммы нескольких рациональных выражений, рациональное уравнение $A(x)=B(x)$ можно решить так:

1 шаг. Ищем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

2 шаг. Обе части уравнения умножаем на этот общий знаменатель;

3 шаг. Ищем решения полученного уравнения;

4 шаг. Исключаем из множества найденных корней те, которые обращают общий знаменатель в нуль.

Пример 3. Решите уравнение $\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x(2-x)}$.

Умножаем обе части уравнения на общий знаменатель $2x(2–x)$.

Упрощая полученное уравнение $4x+x(2–x)=8$, приводим его к следующему квадратному уравнению: $x^2–6x+8=0$;

Так как $D=9–8=1>0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1=2; \quad x_2=4.$$

Проверка.

При $x=2$ знаменатель обращается в нуль: $x(2–x) = 2(2–2) = 0$. Значит, $x=2$ не является решением исходного уравнения.

При $x=4$ знаменатель отличен от нуля $x(2–x) = 4(2–4) \neq 0$. Значит, $x=4$ является решением исходного уравнения.

Если $A(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, то при решении рационального уравнения вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ полезно воспользоваться основным свойством пропорции: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$.

При этом получим следующий алгоритм решения:

1 шаг. Ищем решения уравнения $f(x)q(x)=p(x)g(x)$;

2 шаг. Исключаем из множества найденных корней те, которые обращают общий знаменатель $q(x)g(x)$ в нуль.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-4}$.

$(x–2)(x–4) = (x+2)(x+3)$; $\quad x^2–4x–2x+8 = x^2+3x+2x+6$;

$–6x+8–5x–6 = 0$; $\quad –11x = –2$; $\quad x=\dfrac{2}{11}$.

Если $x=\dfrac{2}{11}$, то $x+2 = \dfrac{2}{11}+2 \neq 0$; $x–4 = \dfrac{2}{11}–4 \neq 0$.

Ответ: $\dfrac{2}{11}$.

В некоторых случаях удачно выполненная замена позволяет привести заданное уравнение к более простому.

Пример 5. Решите уравнение:

1) $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2-36=0$; $\qquad$ 2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+2}=1$.

1) Выполним замену $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 = t$. Тогда $t \geqslant 0$, а уравнение получит вид $t^2+5t-36=0$. Последнее имеет корни $t=-9$ и $t=4$, из которых второе положительно.

Значит $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 = 4$, то есть $\frac{2x}{x+1} = 2$ или $\frac{2x}{x+1} = -2$.

При $\frac{2x}{x+1} = 2$ уравнение не имеет решение, а при $\frac{2x}{x+1} = -2$ уравнение имеет единственное решение $x=-0,5$.

Ответ: $x=-0,5$.

2) Очевидно, что $x=0$ удовлетворяет уравнению. Пусть $x \neq 0$. Разделив в каждой дроби уравнения числитель и знаменатель на x, получим уравнение

$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{x-2+\frac{2}{x}} = 1$. Выполним замену: $z = x + \frac{2}{x} - 2$.

Тогда наше уравнение получит вид: $\frac{z+5}{z+1} + \frac{1}{z} = 1$.

Решим последнее уравнение:

$$\frac{z+5}{z+1} + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z} + \frac{z+1}{z(z+1)} - \frac{z(z+1)}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{5}$$

Теперь найдем x.

$$x + \frac{2}{x} - 2 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} - \frac{9}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 10 = 0.$$

В силу того, что дискриминант квадратного уравнения $5x^2-9x+10=0$ отрицателен, то последнее уравнение не имеет действительных решений.

Ответ: $x=0$.

Системы рациональных уравнений

Решение систем, состоящих из рациональных уравнений, опирается на известные нам методы сложения, подстановки и т.д. При этом следует не забывать, что знаменатели, участвующих рациональных выражений, не могут обращаться в нуль.

Пример 6. Решите систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

△ 1) Сделаем в первом уравнении замену $\dfrac{x}{y}=t$. Получим $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{t}$ $(t\neq 0)$.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}, \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Отсюда или $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=-5. \end{cases}$

Решим полученные системы:

$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2-y^2=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2-y^2=5. \end{cases}$

Первая система имеет решения (3, 2), (–3, –2), а второя не имеет решений.
Ответ: (3; 2), (–3; –2).

2) Обозначим $a=xy$, $b=\dfrac{x}{y}$. $\begin{cases} 2a-3b=15, \\ a+b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=3. \end{cases}$

$$\begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y\cdot 3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y^2=4. \end{cases}$$

Ответ: (6; 2), (–6; –2). ▲

Вопросы и задания

1. Дайте определение рационального уравнения.
2. Дайте определение равносильных уравнений.
3. Приведите пример равносильных уравнений.

Упражнения

Решите уравнения (**1–2**):

1. a) $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$; c) $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$;

d) $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$; e) $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$;

g) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$; i) $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$.

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$; b) $\frac{8x-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$;

c) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; d) $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$;

e) $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$; f) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Укажите равносильные уравнения:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

d) $10x=8$; e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

4. Решите систему уравнений (**4–7**):

a) $\begin{cases}\frac{x}{2y+3}=3,\\ \frac{y}{2y+3}=-\frac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2,\\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{25}{y}=7,\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\frac{5x}{8y}=\frac{8y}{5x},\\ 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\frac{7}{y}=11,\\ 7x+\frac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases}4x=\frac{25}{y}+15,\\ 4y=\frac{25}{x}+15;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x}{4x-7}=-\frac{y}{4x-7},\\ 4x^2-11y+7=0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{x}{5x-4y}=\frac{y}{5y-4x},\\ xy=-16.\end{cases}$

7. a) $\begin{cases}(x+1)(x-8)=0,\\ \dfrac{y-3}{x+y-2}=5;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{y^2},\\ xy=-8;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^5}=5\dfrac{x^2}{y^4},\\ x-5y=15.\end{cases}$.

8. В зале клуба имеется 320 мест, которые одинаково распределены по рядам. В каждый ряд добавили сначала по 4 места, затем добавили еще один ряд. В итоге получили 420 мест. Сколько рядов в зале?

9. 108 экзаменуемых писали сочинение. Им было роздано 480 листов бумаги, при этом каждая девушка получила по сравнению с юношами на один лист больше. Оказалось, что девушки всего получили столько же листов, сколько и юноши. Найдите число девушек и юношей.

29-32 ПРОСТЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Уравнения, в которых неизвестное участвует под знаком корня называется *иррациональным.*

Рассмотрим методы решения некоторых видов иррациональных уравнений.

Рассмотрим простое иррациональное уравнение вида

$$\text{I} \qquad \sqrt{f(x)}=g(x) \qquad (1)$$

Пусть выражения $f(x)$, $g(x)$ принимают неотрицательные значения.

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение.

Так как $f(x)=g^2(x)\geqslant 0$, то выражение $f(x)$ принимает неотрицательные значения.

Значит, решение уравнения (1) осуществляется по правилу:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}.$$

Аналогично уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=h(x)$, равносильно системе $\begin{cases}f(x)=h^{2n}(x)\\ h(x)\ge 0\end{cases}$.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

△ Возводя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $2x-x^2=x^2-4x$ или $2x(x-3)=0$. Отсюда получим корни $x_1=0$, $x_2=3$. Так как $x>2$, то $x=3$ – решение данного уравнение. ▲

II Уравнения вида $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$.

Для того чтобы произведение двух выражений обращалось в нуль, необходимо и достаточно равенство нулю, хотя бы одного из сомножителей.

Значит, для того чтобы $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ должно выполняться равенство $g(x)=0$ или совокупность равенств $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$.

Этот факт мы кратко будем записывать так: $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Пример 2. Решите уравнение $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$.

△ $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$

Ответ: –4 и 2. ▲

Пример 3. Решите уравнение $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

△Данное уравнение приводится к виду $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$. Так как система $\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases}$ не имеет решений, то достаточно рассмотреть

уравнение $\sqrt{x^2-5x+4}=2$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим равносильное ему уравнение , $x^2-5x+4=4$.

Ответ: 0 и 5. ▲

III Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$.

При решении таких уравнений сначала следует учесть четность-нечетность числа *n*, а затем привести его к равносильному уравнению.

Пусть *n* – нечетно: $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Например, уравнение $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$.

△ $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$ *Ответ:* 1 и –7. ▲

Пусть n четно, то есть $n=2k$. В этом случае данное уравнение равносильно каждой из систем:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

На практике из данных систем выбирается то, которое легче решается.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$.

△

$$\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=x, \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $x=2$. ▲

IV Замена переменных.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$.

△ Выполним замену $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$. Тогда

$$\begin{cases} u+\dfrac{3}{u}=4, \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=1, \\ u=3, \end{array}\right. \\ u\ge 0. \end{cases}$$

Найдем теперь корни данного уравнения.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1, \\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1,2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=2$ и $x=1,2$. ▲

Пример 7. Решите уравнение $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$.

△ Выполним замену $z=\sqrt{x^2+3x}$. Тогда

$$\begin{cases} z^2+z=6, \\ z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=-3, \\ z=2, \end{array}\right. \\ z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow z=2.$$

Найдем теперь корни данного уравнения

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-4$ и $x=1$.

Системы иррациональных уравнений

Решение систем, состоящих из иррациональных уравнений, опирается на известные нам методы сложения, подстановки и т.д. При этом следует учитывать области существования участвующих иррациональных выражений.

Пример 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Данная система имеет решения (4; 9) и (9; 4).

Пример 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$.

Обозначим $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$. Воспользовавшись формулой сокращенного умножения, получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

Эта система имеет решения $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$. Отсюда получим решения (1; 8) и (8; 1) исходной системы.

Пример 10. Найдите точку $C(x; 0)$, равноудаленную от точек $A(3; 4)$ и $B(-2; 5)$ плоскости.

Из соотношения $AC=BC$ и формулы расстояния между двумя точками плоскости получим иррациональное уравнение

$$\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}.$$

Делая равносильные преобразования, получим уравнение, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ откуда $-10x=4$. Последнее уравнение имеет корень $x=-0,4$. Значит, $C(-0,4;\ 0)$ – искомая точка.

Пример 11. Найдите точку на прямой $y=3x$, равноудаленную от точек $A(-1;2)$ и $B(3;-4)$ плоскости.

По условию, ордината и абсцисса искомой точки удовлетворяет соотношению $y=3x$, поэтому она имеет координаты $C(x;3x)$. Из соотношения $AC=BC$ и формулы расстояния между двумя точками плоскости получим иррациональное уравнение $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$. Делая равносильные преобразования, получим уравнение, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, откуда $-28x=20$. Последнее уравнение имеет корень $x=-\frac{5}{7}$.
Значит, $C(-5/7;\ -15/7)$ – искомая точка.

Ответ: $C(-5/7;\ -15/7)$.

Вопросы и задания

1. Дайте определение иррационального уравнения и приведите пример.
2. Когда два иррациональных уравнения равносильны?
3. Как решается система вида: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\\ \sqrt{xy}=b\end{cases}$
4. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a,\\ x+y=b\end{cases}$

Упражнения

Решите уравнение (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Решите систему уравнений (**20–23**):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15. \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

24. Найдите точку $C(x;\ 0)$, равноудаленную от точек $A(5;\ 7)$ и $B(-3;\ 4)$ плоскости.

25. Найдите точку $C(x;\ 0)$, равноудаленную от точек $A(5;\ 9)$ и $B(-6;\ 7)$ плоскости.

33-36 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит в показатель степени.

При решении показательных уравнений полезно использовать следующие тождества: $(a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0)$

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Приведем методы решения некоторых типов показательных уравнений.

I Приведение к одному основанию.

Метод основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели, т.е. уравнения надо попытаться привести к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$. Отсюда $f(x)=g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

△ Заметим, что $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ и перепишем наше уравнение в виде $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$.

Применив тождество (1), получим $3x-7=-7x+3, \quad x=1$.

Ответ: 1.▲

Пример 2. Решить уравнение $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

△ Переходя к основанию степени 2, получим:

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x} \qquad 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

Согласно тождеству (2), имеем $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ или $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Последнее уравнение равносильно уравнению $4x-19=2{,}5x$.

Откуда $x=\frac{38}{3}$.▲

II Введение новой переменной.

Пример 3. Решить уравнение $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

△ Применив тождество 2, перепишем уравнение как $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0$.

Введем новую переменную: $5^x=t>0$. Получим уравнение $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$, которое имеет корни $t_1=-50$, $t_2=25$. Однако корень $t_1=-50$ не удовлетворяет условию $t>0$. Значит, $5^x=25$ и $x=2$.

Ответ: $x=2$.▲

Пример 4. Решить уравнение $9^x+6^x=2\cdot 4^x$.

△ Разделив обе части уравнения на $4^x\neq 0$, получим:

$\left(\frac{9}{4}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0$. Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t>0$, тогда последнее уравнение запишется так: $t^2+t-2=0$.

Решая уравнение, найдем $t_1=-2$, $t_2=1$.

Значение t_1 не удовлетворяет условию $t>0$. Следовательно,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\quad \Rightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$.▲

Пример 5. Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$

△ Заметим, что $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=1$. Значит, $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Перепишем уравнение в виде $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Обозначим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t>0$. Получим $\dfrac{1}{t}+t=4$, то есть $t^2-4t+1=0$.

Корнями данного уравнения будут $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.
Следовательно,

1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$, $\quad\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$, $\quad\dfrac{x}{2}=1$, $\quad x=2$.

2) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}$, $\quad\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x}=2-\sqrt{3}$,

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x}=2-\sqrt{3}$, $-\dfrac{x}{2}=1$, $\quad x=-2$.

Ответ: $x=-2$ и $x=2$. ▲

III Вынесение общего множителя за скобку.

Пример 6. Решить уравнение $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$.

△ После вынесения за скобку в левой части 6^x, а в правой 2^x, получим $6^x(1+6)=2^x(1+2+4)$ или $6^x=2^x$. Разделим обе части уравнения на $2^x\neq0$, получим $3^x=1$, $x=0$.

Ответ: $x=0$. ▲

Системы простейших показательных уравнений

Пример 7. Решите систему уравнений: $\begin{cases}3^{x+y}=27,\\2^{5x-y}=8.\end{cases}$

△ По свойству степеней система уравнений равносильна следующей системе : $\begin{cases}3^{x+y}=3^3,\\2^{5x-y}=2^3.\end{cases}$ Отсюда получим систему $\begin{cases}x+y=3,\\5x-y=3\end{cases}$. Очевидно, что последняя система имеет решение $x=1$, $y=2$. *Ответ:* $x=1$, $y=2$. ▲

Пример 8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=9, \\ 2^{7x+3y}=8. \end{cases}$

△ По свойству степеней система уравнений равносильна следующей системе: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=3^2, \\ 2^{7x+3y}=2^3. \end{cases}$ Последняя система, в свою очередь, равносильна системе $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3. \end{cases}$ Умножив второе уравнение этой системы на (–2) и сложив с первым, получим уравнение $-9x=-4$. Отсюда, найдем $x=\frac{4}{9}$. Подставив полученное значение во второе уравнение, получим $\frac{28}{9}+3y=3$ или $3y=3-\frac{28}{9}$, или $3y=-\frac{1}{9}$, или $y=-\frac{1}{27}$. *Ответ:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$. ▲

Пример 9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4^x+5^y=9, \\ 4^x-5^y=-1. \end{cases}$

△ Сделаем замену: $4^x=u$, $5^x=v$ Тогда наша система примет вид : $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$
Очевидно, что эта система уравнений имеет решение $u=4$, $y=5$.
Тогда получим уравнения $4^x=4$ и $5^y=5$. Отсюда $x=1$, $y=1$.
Ответ: $x=1$, $y=1$. ▲

Упражнения

Решите уравнение (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^x=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^x=-6$; b) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$;
c) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^x=31$; d) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^x=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^x+3^x-6=84$; b) $25^x+5^x-30=0$;
c) $5\cdot4^x+2^x-6=0$; d) $9^x+3^x-12=0$.

30. a) $9\cdot25^x-7\cdot15^x-16\cdot9^x=0$; b) $7\cdot16^x+9\cdot12^x-16\cdot9^x=0$.

31. a) $4^x+7\cdot6^x-8\cdot9^x=0$; b) $9\cdot16^x+7\cdot12^x-16\cdot9^x=0$.

32. a) $(0{,}125)^{x-1}=\sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5}\cdot(0{,}8)^{x-1}=(1{,}25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\frac{4}{16^x}$; b) $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot 2^{3(x-1)}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$.

36. Вкладчик положил на счет в банке 100 миллионов сум под 22% годовых. Через несколько лет на его счету стало 221 533 456 сум. Найдите количество лет.

37. Предприниматель положил на счет в банке 10 миллионов сум под 21% годовых. Через несколько лет на его счету стало 17 715 610 сум. Найдите количество лет.

38. Известно, что прирост населения за год составляет 4%. Через сколько лет численность населения увеличится в 3 раза?

39. Известно, что население за год уменьшается на 2%. Через сколько лет численность населения уменьшится на 10 %?

Решить систему уравнений (**40–43**):

40. a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\ 2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\ 2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\ 9^{3x}\cdot 3^y=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\ 2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\ 2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^x+2^y=6,\\ 2^x-2^y=2.\end{cases}$

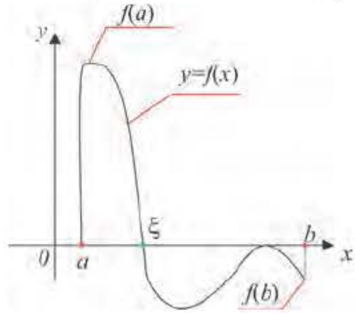
42. a) $\begin{cases}5^{3x-y}=25,\\ 2^{x^2+xy+y^2}=8;\end{cases}$ b) $\begin{cases}5^{x+2y}=125,\\ 2^{x^2+3xy-y^2}=8;\end{cases}$ c) $\begin{cases}11^x+7^y=18,\\ 11^x-7^y=4.\end{cases}$

43. a) $\begin{cases}5^{x+y}=25,\\ 2^{x^2-3xy+2y^2}=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}5^{3x-y}=25,\\ 2^{x^2+xy+y^2}=8;\end{cases}$ c) $\begin{cases}6^x+3^y=39,\\ 6^x-3^y=108.\end{cases}$

37-38 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Пусть многочлен $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда внутри этого отрезка существует хотя бы одно решение уравнения $f(x)=0$. Это означает, что существует такое $\xi \in [a, b]$ (читается как "кси"), что $f(\xi)=0$.

Это утверждение проиллюстрировано на следующем чертеже.



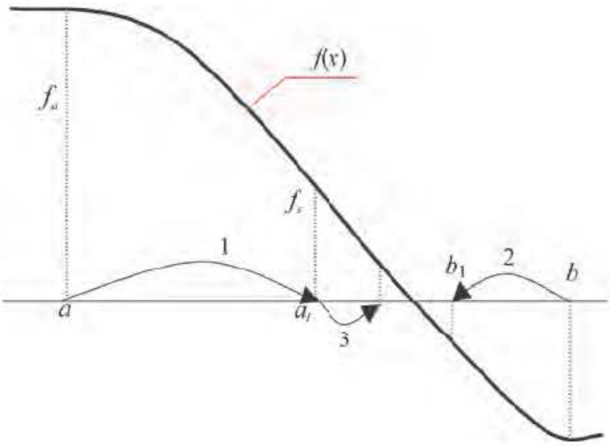
Рассмотрим отрезок $[a, b]$, содержащий лишь один корень уравнения .

Метод последовательного деления отрезка пополам заключается в последовательном разделении отрезка $[a, b]$ пополам до тех пор, пока длина полученного отрезка не будет меньше заданной точности ε.

Для этого:

1) вычисляется значение $f(x)$ выражения $f_a=f(a)$ в точке $x=a$;
2) отрезок делится пополам, то есть вычисляется значение $x=(b–a)/2$;
3) вычисляется значение f_x выражения $f(x)$ в точке $x=(b–a)/2$;
4) проверяется условие $f_a \cdot f_x>0$;
5) если это условие выполняется, то в качестве левого конца нового отрезка выбирается середина предыдущего отрезка, то есть полагается, что $a=x$, $f_a=f_x$ (левый конец отрезка переходит в середину);
6) если это условие не выполняется, то правый конец нового отрезка переходит в середину, то есть полагается, что $b=x$;
7) для нового отрезка проверяется условие $b–a< \varepsilon$;
8) если это условие выполняется , то вычисления заканчиваются. При этом в качестве приближенного решения выбирается последнее вычисленное значение x. Если это условие не выполняется, то, переходя к пункту 2 этого алгоритма, вычисления продолжаются.

Метод последовательного деления пополам проиллюстрирован на этом чертеже:



Нахождение интервала, содержащего корень

Для нахождения интервала, содержащего корень уравнения $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$, вычисляются значения

$$A=max\ \{a,b,c\} \text{ и } B=max\ \{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}.$$

Оказывается, что для корня $\frac{1}{1+B} < |x| < 1+A$ данного уравнения выполнено неравенство. Значит, данное уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий интервалу $(-1-A;\ 1+A)$. Для приближенного вычисления данного корня найдем целые $-1-A<d_1<d_2<1+A$ и $f(d_1)\cdot f(d_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ удовлетворяющие неравенству d_1 и d_2.

Пример 1. Найдите интервал, содержащий корень уравнения $2x^3+3x^2+5x+1=0$.

△ Поделив обе части уравнения на 2 , получим, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$.

Так как, для нового уравнения $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$, $A=max\{\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2}\}=2{,}5$.

Значит, в интервале, $x\in(-2{,}5;\ 2{,}5)$ уравнение имеет хотя бы один корень. В то же время уравнение при $x_0\in(0;\ 2{,}5)$ не имеет ни одного корня, так как, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ выполняется. Значит, корень уравнения лежит в $(-2{,}5;\ 0)$. Для уточнения этого интеравала положим $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Для $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ проверим выполнение условия

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0{,}5=-6{,}5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1{,}5-2{,}5+0{,}5=-1{,}5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0{,}5>0$

Значит, уравнение имеет корень, принадлежащий интервалу $(-1; 0)$.

Нахождение приближенного корня с заданной точностью

Исходя из вышесказанного, заключаем, что если выполнено неравенство $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ корень уравнения принадлежит интервалу $(\alpha; \beta)$. Пусть $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Если $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$, то $x=\gamma$ – приближенный корень уравнения с точностью ε. Если $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$, то корень лежит в интервале $(\gamma; \beta)$; если $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$, то корень лежит в интервале $(\alpha; \gamma)$. Продолжим процесс до нахождения приближенного значения корня с заданной точностью.

Пример 2. Найдите приближенное значение корня уравнения $x^3+1{,}5x^2+2{,}5x+0{,}5=0$ с заданной точностью $\varepsilon=0{,}1$.

Из предыдущего примера нам известно, что корень лежит в интервале $(-1; 0)$. Из того, что $\gamma=\frac{-1+0}{2}=-0{,}5$ и $(-0{,}5)^3+1{,}5(-0{,}5)^2+2{,}5(-0{,}5)+0{,}5=-0{,}5<0$ заключаем, что корень лежит в интервале $(-0{,}5; 0)$.

Так как, $|(-0{,}25)^3+1{,}5(-0{,}25)^2+2{,}5(-0{,}25)+0{,}5| = |-0{,}046| < 0{,}1$, то $x=-0{,}25$ – приближенное значение корня с точностью $\gamma=\frac{-0{,}5+0}{2}=-0{,}25$.

Вопросы и задания

1. Как найти интервал, содержащий корень уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$?
2. Объясните сущность метода последовательного деления пополам.

Упражнения

Найдите интервал, содержащий корень уравнения (**44–47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Найдите приближенный корень уравнения с точностью $\varepsilon=0{,}1$ (**48–51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

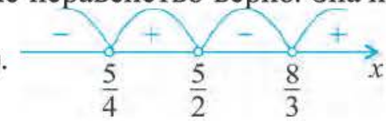
39-41 ПРОСТЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Рациональные неравенства одной переменной и методы их решения

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – рациональные выражения. Отношения вида $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ называются ***рациональными неравенствами*** (переменной x). Всякое значение x, обращающее неравенство в истинное числовое неравенство, называется решением неравенства.

Пример 1. Решите неравенство: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

△ Будем решать неравенство методом интервалов. С этим методом вы ознакомились в 9 классе. Приравняв выражения в скобках к нулю, получим $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$. Эти числа разбивают числовую прямую на интервалы $(-\infty;\ \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};\ +\infty)$. Выберем произвольное значение, например, $x = 10$ из интервала $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ и, подставив в неравенство, заключаем, что на этом интервале наше неравенство верно. Значит, оно верно и на интервалах $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};\ +\infty)$.

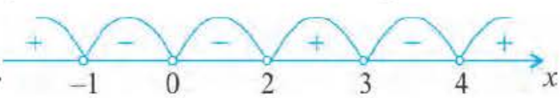


▲

Пример 2. Решите неравенство: $\frac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ Числа $x = 2$, $x = 4$ не удовлетворяют неравенству. При $x\neq2$, $x\neq4$ выполнено $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$. Поэтому при умножении обоих частей неравенства на $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ получим равносильное неравенство: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

Приравняв выражения в скобках к нулю, Найдем $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $x_6 = 4$. Эти числа разбивают числовую прямую на интервалы: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$. Так как среди найденных чисел 0 встречается дважды, то на интервалах, граничащих с 0, знаки неравенства совпадают. Выбрав на последнем интервале число $x = 10$ и подставив его в наше неравенство, получим верное неравенство. Значит, наше неравенство имеет решение: $(-\infty; -1)\cup(2; 3)\cup(4; +\infty)$.

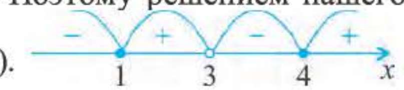


▲

Пример 3. Решите неравенство: $\frac{x^2-5x+4}{x-3}\geq0$.

△ Приравняем знаменатель, $x–3$ к нулю, а также, решив уравнение

$x^2-5x+4=0$, получим корни $x_1=1$, $x_2=4$. При этом числа $x_1=1$ и $x_2=4$ удовлетворяют неравенству. Значит, числовая прямая разбивается на следующие интервалы: $(-\infty; 1]$, $[1; 3)$, $(3; 4]$, $[4; +\infty)$.

Взяв внутри последнего интервала значение $x=5$, получим верное числовое неравенство. Поэтому решением нашего неравенства является множество $[1;3)\cup[4;+\infty)$. 

▲.

Системы простых рациональных неравенств

Пример 4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x-8\le 1, \\ 4x+3>5. \end{cases}$

△Упрощая каждое неравенство системы, получим: $\begin{cases} 3x\le 1+8, \\ 4x>5-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x\le 9, \\ 4x>2; \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x\le 3, \\ x>0,5. \end{cases}$ Значит, решение нашей системы есть множество $(0,5; 3]$, являющееся общей частью интервалов $(-\infty; 3]$ и $(0,5; +\infty)$.▲

Пример 5. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (3-x)(4+x)\ge 0, \\ (2+x)(5-x)<0. \end{cases}$

△Решим каждое неравенство системы. Решением первого неравенства является интервал $[-4; 3]$, а решением второго неравенства – множество $(-\infty; 2)\cup(5; +\infty)$. Решением нашей системы является общая часть этих множеств, то есть $[-4; 2)$.▲

Вопросы и задания

?

1. Что такое неравенство? Приведите примеры неравенств.
2. Приведите примеры равносильных неравенств.
3. Объясните на примере, как решаются простейшие рациональные неравенства.

Упражнения

52. Решите неравенство (**52–53**):

1) $(x-6)(3-17x)(2x+8)\le 0$;
2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;
3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$;
4) $\dfrac{2x-5}{2x+1}\ge 0$;
5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$;
6) $\dfrac{3x+11}{2-x}<0$;
7) $\dfrac{x-1}{4x-1}<1$;
8) $\dfrac{2x-7}{3-7x}\ge 1$;
9) $\dfrac{x^2-5x+11}{x^2-7}\le 0$;
10) $\dfrac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8) \le 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11) > 0$;

3) $(3-5x)(2x^2-4x+4) < 0$; 4) $\dfrac{x-5}{2x+1} \ge 0$;

5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1) \ge 0$; 6) $\dfrac{3x+1}{2-x} < 0$;

7) $\dfrac{x+1}{4x-1} < 1$; 8) $\dfrac{2x-7}{3-7x} \ge 3$; 9) $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-7} \le 0$; 10) $\dfrac{x^3+1}{2x^2-3x+1} > 1$.

Решите систему неравенств (**54–55**):

54. 1) $\begin{cases} 3x-5 \le 7x, \\ 2x+1 > -2x+3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-1}{5} < 1, \\ -\dfrac{5x+1}{2}-\dfrac{7}{3} > \dfrac{x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5 \le 7x, \\ 2x-1 > -3x+3. \end{cases}$

55. 1) $\begin{cases} 2(x-5) \le 4(x+3), \\ 2x-1 > -5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{5x}{3}-\dfrac{2x}{4} \ge 3\dfrac{1}{3}, \\ 2-\dfrac{5-4x}{2} < \dfrac{6x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x+5 \le 7x, \\ 6x-4 > 3x+3. \end{cases}$

42-43 ПРОСТЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

*Так как решения неравенств, как прави*ло, представляют собой бесконечные числовые множества, то проверить их, подставляя некоторые значения неизвестной, не представляется возможным.

Одним из основных способов нахождения множества решений является способ преобразований, приводящих к равносильным неравенствам. Отметим, что возведение в нечетную степень обоих частей неравенства приводит к равносильному неравенству.

Если мы возводим обе части неравенства в четную степень, то нужно помнить, что мы получим равносильное неравенство лишь в случае, когда обе части исходного неравенства неотрицательны.

Неравенства, в которых неизвестное участвует под знаком корня называется *иррациональным.*

Для решения иррационального неравенства естественно привести его к равносильному путем возведения обоих его частей в соответствующую степень.

Рассмотрим *простейшие иррациональные неравенства вида:*

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ или $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$.

Иррациональное неравенство вида $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или аналогичное ему неравенство $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ равносильны системе неравенств:

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

В системах (1) первое неравенство получилось путем возведения в соответствующую степень (в квадрат), второе неравенство представляет собой условие существования квадратного корня, а третье неравенство означает возможность возведения в квадрат.

Аналогично, для того, чтобы решить неравенство вида $\sqrt{A(x)} > B(x)$ достаточно рассмотреть системы:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Иррациональное неравенство вида $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Так как обе части неравенства для допустимых x принимают неотрицательные значения, то возведение в квадрат допустимо. В этом случае первое неравенство (3) получилось в результате возведения в квадрат, второе неравенство представляет собой условие существования квадратного корня. Очевидно, что условие выполняется автоматически.

Правила (1)–(3) считаются основными при решении иррациональных неравенств.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△Правая часть этого неравенства отрицательна, а левая принимает для всех допустимых значений x неотрицательные значения. Поэтому неравенство не имеет решений. *Ответ:* Решений не существует.▲

Пример 2. Решите неравенство: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△ Правая часть этого неравенства отрицательна, в то же время левая принимает для всех допустимых значений x неотрицательные значения. Значит данное неравенство выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 3$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$. ▲

Пример 3. Решите неравенство: $\sqrt{2x-3}<1$.

△ Согласно правилу (1) $\begin{cases} 2x-3<1^2, \\ 2x-3\geq 0. \end{cases}$

Так как, условие $B(x)=1\geq 0$ выполнено для всех x, его отдельно выписывать не обязательно. *Ответ:* $\left[\frac{3}{2};2\right)$. ▲

Пример 4. Решите неравенство : $\sqrt{4x-3}>1$.

△Это неравенство решается по правилу (2). Так как, условие $B(x)=1\geq 0$ выполнено для всех x , то мы можем выписать непосредственно равносильное неравенство: $4x-3>1^2$. *Ответ*: $x>1$. ▲

Пример 5. Решите неравенство: $\sqrt{x+18}<2-x$.

△ Это неравенство решается по правилу (1):

$$\begin{cases} x+18\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ x+18<(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -18 \\ x\leq 2 \\ x^2-5x-14>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18\leq x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18\leq x<-2.$$

Ответ: $x\in[-18;-2)$. ▲

Пример 6. Решите неравенство: $\sqrt{x^2+x-2}>x$.

△ Это неравенство решается по правилу (2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x^2+x-2\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0, \\ x^2+x-2>x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -2, \\ x\geq 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0, \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -2, \\ x>2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$. ▲

Пример 7. Решите неравенство: $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}$.

△ Это неравенство решается по правилу (3):

$$\begin{cases} 2x+1>2-3x \\ 2-3x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\leq\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{3}$. ▲

Пример 8. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}<1$.

Найдем множество допустимых значений неизвестной x:

$$\begin{cases} x^2-25\ge 0, \\ x+6\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x\ne 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-6, \\ -6<x\le -5. \\ x\ge 5. \end{array}\right.$$

Если $x + 6 > 0$, то мы можем возвести обе части заданного неравенства в квадрат:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6<x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-25}<x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6<x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x^2-25<x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6<x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x>-\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12}<x\le -5, \\ x\ge 5. \end{array}\right.$$

При $x < -6$ заданное неравенство обязательно выполняется.

Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{61}{12};-5\right]\cup[5;+\infty)$.

Замена переменной

Этот метод аналогичен соответствующему методу замены переменной, использованному при решении иррациональных уравнений.

Пример 9. Решите неравенство: $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\ge 0$.

Выпишем неравенство в виде: $-9\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+18\ge 0$.

Введем новую переменную: $t=\sqrt[4]{x}$, $t\ge 0$. В этом случае

$$\begin{cases} -9t+t^2+18\ge 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t\ge 6, \\ t\le 3, \end{array}\right. \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 6, \\ 0\le t\le 3. \end{cases}$$

Значит: $\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}\ge 6, \\ 0\le\sqrt[4]{x}\le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 6^4, \\ 0\le x\le 3^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1296, \\ 0\le x\le 81. \end{array}\right.$

Ответ: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Введем новую переменную: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Отсюда, $x=15-t^2$ и получим рациональное неравенство от переменной t:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t}<0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<4.$$

Из последнего неравенства найдем x:

$$0<\sqrt{15-x}<4 \Leftrightarrow 0<15-x<16 \Leftrightarrow -1<x<15.$$

Ответ: $x\in(-1;15)$. ▲

Вопросы и задания

1. Что называется иррациональным неравенством?
2. Приведите примеры иррациональных неравенств, решаемых равносильными преобразованиями.
3. Приведите пример иррационального неравенства, не имеющего решений.

Упражнения

Для каких значений неизвестного неравенства имеют смысл? (**56–59**)

56. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2-x}>-x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2+3x+1}<x+1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}\ge 2$.

Решите неравенство (**60-66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1}<x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1}>x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1}\le x$; 2) $\sqrt{x^2-x-2}\ge 2x+3$.

62. 1) $x-3<\sqrt{x^2+4x-5}$; 2) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x}>x$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}\ge 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$; 2) $x>\sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\ge 4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$; 2) $\sqrt[3]{x+1}\le\sqrt[3]{5x}$.

67. Пусть даны точки $A(9;\ 4)$, $B(-4;\ 5)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

68. Пусть даны точки $A(2;\ 4)$, $B(-3;\ 5)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

69. Пусть даны точки $A(4;\ 4)$, $B(-5;\ 7)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

70. Пусть даны точки $A(2;\ 4)$, $B(+3;\ -5)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

71. Пусть даны точки $A(5;\ 4)$, $B(-6;\ 5)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

72. Пусть даны точки $A(8;\ 4)$, $B(-7;\ 5)$. Найдите множество точек $C(x;\ y)$, удовлетворяющих условию $AC>BC$.

Тестовые задания для контроля

В каждом тестовом вопросе один из вариантов ответа «верный», а остальные –«неверные». При решении следует отметить верный вариант ответа.

1. Укажите равносильные уравнения:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A) 1 и 3; B) 2 и 3; C) 1 и 2; D) все.

2. Найдите наибольший корень уравнения: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) -4; B) 5; C) 16; D) 11.

3. Найдите сумму корней биквадратного уравнения: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) -1; C) 0; D) 11/3.

4. Сколько решений имеет система? $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Решите уравнение: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Сколько решений имеет система? $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Пусть даны точки $A(3;\ 1)$ и $B(7;\ 3)$. Найдите точку $C(5;\ x)$, равноудаленную от них.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).

8. Решите уравнение: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) -1; D) 0.

9. Найдите целые решения уравнения: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) -1; C) 2; D) 1 и -1.

10. В некотором государстве население ежегодно уменьшается на 3% . Через сколько лет население уменьшится на 20%?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11 Решите неравенство: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant 0$.
A) $[-7;\ 1]$; B) $[-7;\ -1]$; C) $[7;\ -1]$; D) $[7;\ 1]$.

12. Сколько целых решений имеет неравенство $|x-2|\leqslant 5$?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Решите неравенство: $|4x-1|\leqslant -2$.
A) $[-7;1]$; B) $[-7;-1]$; C) $[7;-1]$; D) решений нет.

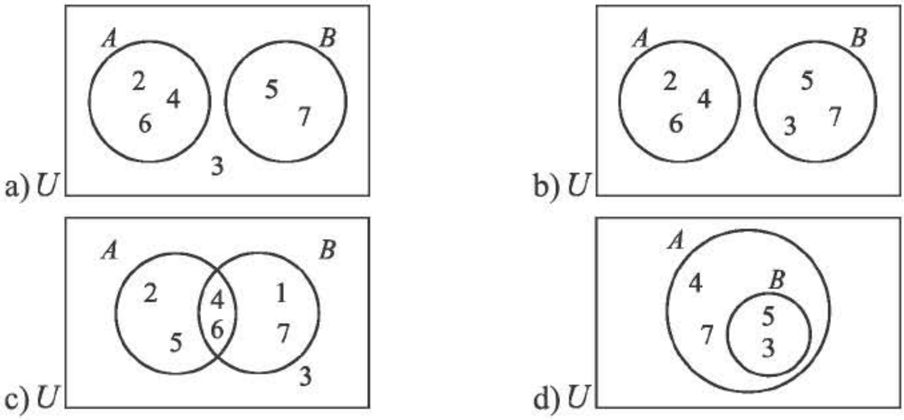
14. Сколько целых решений имеет неравенство $\sqrt{x^2-13x+12}\leq 5-x$
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

Ответы

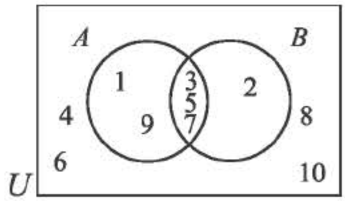
Глава I.

1. a) $5\in D$; b) $6\notin G$; c) $\{2, 5\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\}\subsetneq\{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) **I)** {9} **II)** {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. b) **I)** ∅ **II)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. c) **I)** {1, 3, 5, 7} **II)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. **4.** a) конечное; b) бесконечное. **5.** a) не пересекаются; b) пересекаются. **6.** a) конечное; b) бесконечное; c) бесконечное; d) бесконечное. **7.** a) **I)** Множество A – множество целых чисел больших и равных –1 и меньших или равных 7; **II)** {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **III)** 9. b) **I)** Множество A – множество целых чисел больших и равных –2 и меньших или равных 8; **II)** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **III)** 8. c) **I)** Множество A – множество целых чисел больших и равных 0 и меньших или равных 1; **II)** нельзя; **III)** бесконечное. d) **I)** Множество действительных чисел больших и равных 5 и меньших или равных 6; **II)** нельзя; **III)** бесконечное. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100, x\in\mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000, x\in\mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3, x\in\mathbb{Q}\}$. **9.** a) **I)** 8 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$; **II)** 16 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$; b) 2^n. **10.** a) да; b) нет; c) да; d) да; e) нет; f) нет. **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4, x\in\mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8, x\in\mathbb{Q}\}$. **12.** a) {2, 3, 4, 5, 6, 7}; b) {0, 1, 8}; c) {5, 6, 7, 8}; d) {0, 1, 2, 3, 4}; e) {5, 6, 7}; f) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}; g) {2, 3, 4}. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) {1, 2, 10, 11, 12}; b) {1, 2, 3, 4, 12}; c) {1, 8, 9, 10, 11, 12}; d) {3, 4, 5, 6, 7}; e) {1, 2, 8, 9, 10, 11, 12}; f) {8, 9, 10, 11}; g) {1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; h) {2, 10, 11}; **15.** a) P={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}; b) {2, 5, 11}; c) {2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23}; d) 12=9+6–3. **16.** a) P={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, Q={1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30}; b) {2, 5, 10}; c) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40}; d) 12=8+8–4. **17.** a) P={32, 36, 40, 44, 48, 52, 56}, Q={36, 42, 48, 54}; b) {36, 48}; c) {32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56}; d) 9=7+4–2. **18.** a) R={–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}, S={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; b) {0, 1, 2, 3, 4}; c) {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; d) 9=7+7–5. **19.** a) C={–4, –3, –2, –1}, D={–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; b) {–4, –3, –2, –1}; c) {–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; d) 7=4+7–4. **20.** a) P={1, 2, 3, 4, 6, 12}, Q={1, 2, 3, 5, 9, 18}, R={1, 3, 9, 27}. b) **I)** {1, 2, 3, 6}; **II)** {1, 3}; **III)** {1, 3, 9}; **IV)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18}; **V)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27}; **VI)** {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27}. c) **I)** {1, 3}; **II)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27}. **21.** a) A={4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36}, B={6, 12, 18, 24, 30, 36}, C={12, 24, 36}. b) **I)** {12, 24, 36}; **II)** {12, 24, 36}; **III)** {12, 24, 36}; **IV)** {12, 24, 36}. c) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20 ,24, 28, 30, 32, 36}. d) 12=9+6+3–3–3–3+3. **22.** a) A={6, 12, 18, 24, 30}, B={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, C={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}. b) **I)** {6, 30}; **II)** {2, 3, 5}; **III)** ∅; **IV)** ∅. c) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30}. d) 18=5+8+10–2–3–0+0.

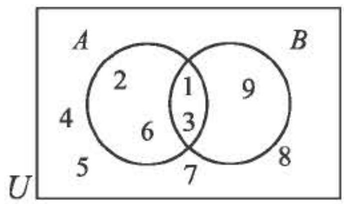
23.



24.
a) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B=\{2, 3, 5, 7\}$;
b) $A \cap B=\{3, 5, 7\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

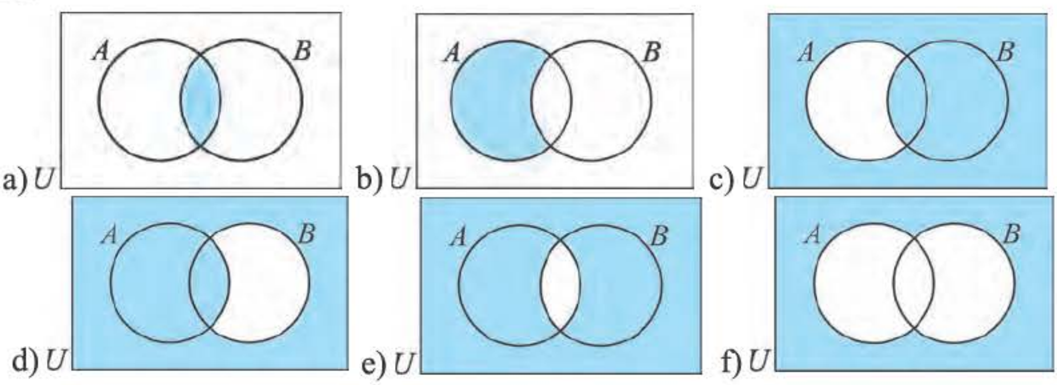


25. a) $A=\{1, 2, 3, 6\}$
$B=\{1, 3, 9\}$;
b) $A \cap B=\{1, 3\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$;

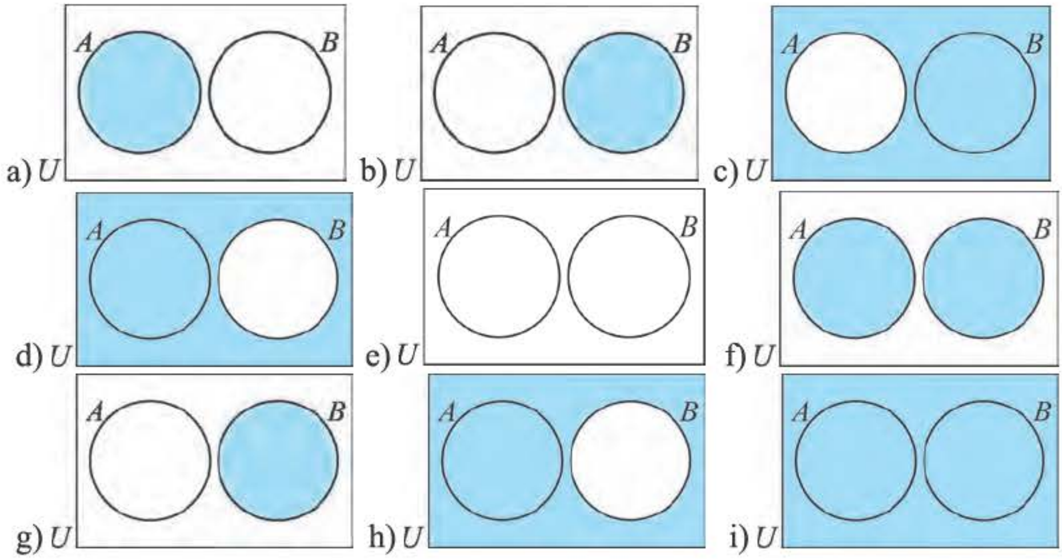


26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. **27.** a) **I)** $\{a, b, c, d, h, j\}$; **II)** $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; **III)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **IV)** $\{a, c, d\}$; **V)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **VI)** $\{a, e, f\}$; **VII)** $\{a\}$; **VIII)** $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

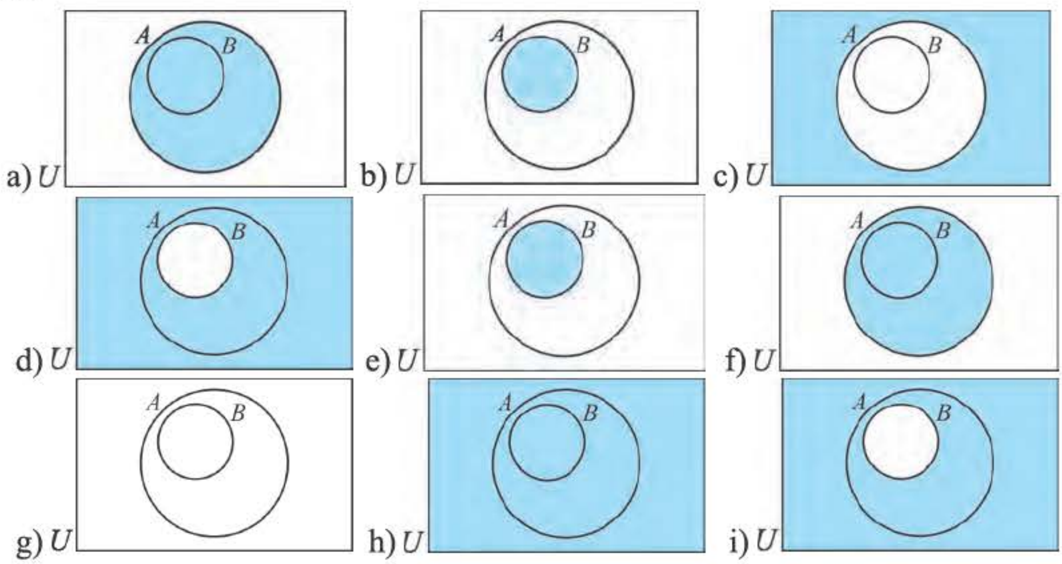
28.



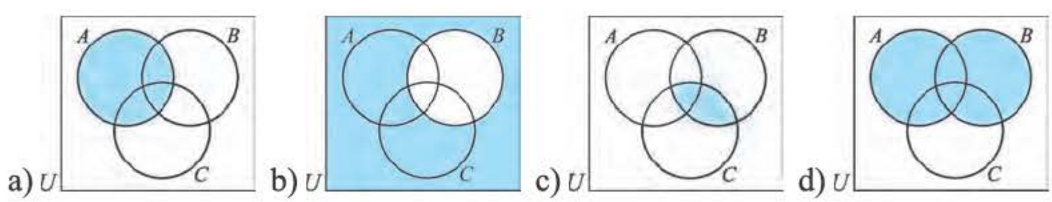
29.

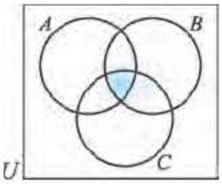

a) U
A
B
b) U
A
B
c) U
A
B
d) U
A
B
e) U
A
B
f) U
A
B
g) U
A
B
h) U
A
B
i) U
A
B

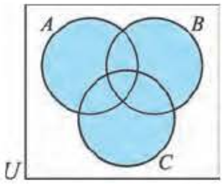
30.

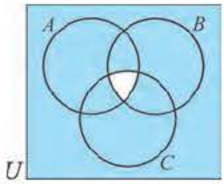

a) U
A
B
b) U
A
B
c) U
A
B
d) U
A
B
e) U
A
B
f) U
A
B
g) U
A
B
h) U
A
B
i) U
A
B

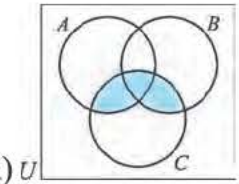
31.


a) U
A
B
C
b) U
A
B
C
c) U
A
B
C
d) U
A
B
C

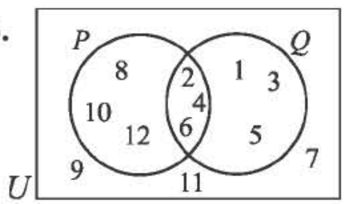
e) 

f) 

g) 

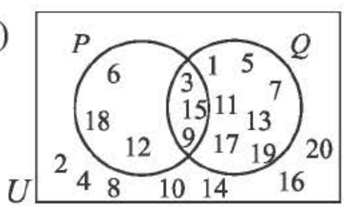
h) 

32. a) да, ложно; b) да, истинно; c) да, истинно; d) да, истинно; e) да, истинно; f) да, истинно; g) нет; h) да, истинно; i) нет; j) да, неопределенно; k) да, неопределенно; 1) нет; m) да, неопределенно; n) да, неопределенно; o) да, неопределенно; p) да, ложно. **33.** k) $\neg p$: некоторые четырехугольники не параллелограммы; m) $\neg r$: 7 – нерациональное число; n) $\neg s$: $23–14 \neq 12$; o) $\neg t$: $52:4 \neq 13$; p) $\neg u$: разность некоторых четных чисел четна; q) $\neg p$: произведение последовательных натуральных чисел не всегда четно; r) $\neg q$: некоторые тупые углы не равны; s) $\neg r$: некоторые трапеции не параллелограммы;
t) $\neg s$: у треугольника два угла взаимно равны, однако он не равнобедренный. **34.** a) $x \geqslant 5$; b) $x<3$; c) $y \geqslant 8$; d) $y>10$; **35.** e) нет, рост Мадины может быть равен 140 см; f) нет; g) да. **36.** f) $x \geqslant 5$, $x \in \mathbb{N}$; g) x – корова , $x \in \{$*лошади, овцы, коровы*$\}$; h) $x<0$, $x \in \mathbb{Z}$; i) x – ученица, $x \in \{$*ученики*$\}$; j) x – девочка – не ученица, $x \in \{$*девочки*$\}$. **41.** e) $p \wedge q$: Мадина – терапевт, а Муниса – стоматолог; f) $p \wedge q$: больше 15 и меньше 30; g) $p \wedge q$: облачно и идет дождь; h) $p \wedge q$: Алим – черноволосый и голубоглазый. **42.** a) истинно; b) ложно; c) ложно; d) истинно; e) ложно.

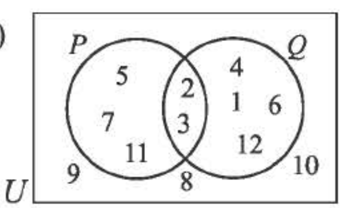
43. 

44. a) истинно; b) ложно.

45. a) истинно; b) истинно.

46. a) 

b) I) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
II) {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19};
III) {3, 9, 15};
IV) {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19}.

47. a) 

b) I) {2, 3};
II) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12};
III) {1, 4, 5, 6, 7, 11, 12}.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** a) Сардор проснулся рано; b) Сардор на ужин ел плов; c) Сардор на завтрак ел сметану и позанимался спортом; d) Сардор в обед ел суп, а на ужин ел плов; e) Сардор ел суп либо на обед, либо на ужин.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) не тавтология; b) тавтология; c) не тавтология.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) Если будет солнечно, я пойду купаться; e) Если x кратно 6, то оно четно; f) Если в холодильнике есть яйца, то Мадина испечет торт.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** a) Конверсия: Если Диера согрелась, то она надела джемпер; Инверсия: если Диера не наденет джемпер, то она не согреется; b) Конверсия: если два соответствующих угла двух треугольников равны, то они будут подобны; Инверсия: если два треугольника не подобны, то у них соответствующие углы не равны; c) если $2x^2=12$, то $x = \pm\sqrt{6}$; Конверсия: если $x = \pm\sqrt{6}$, то $2x^2=12$. Инверсия: если $2x^2 \neq 12$, то $x \neq \pm\sqrt{6}$; d) Конверсия: Если Алим радостный, то он будет играть; Инверсия: Если Алим не будет играть, то он не будет радостным. e) Конверсия: если стороны треугольника равны, то он будет правильным; Инверсия: если треугольник не является правильным, то его стороны не равны. **64.** a) Если у цветка нет шипов, то он – не роза; b) Человек, не принявший верное решение, не может быть судьей; c) Тот, кто не может попасть мячом в цель, не может быть хорошим футболистом; d) Если вещество не принимает форму сосуда, то это не жидкость; e) Если человек не успешен, то этот человек не честен и не образован; **65.** a) Человек, не изучающий математику, не учится в 10 классе; b) Шавкат изу-чает математику; Мирислам – не ученик 10 класса; невозможно сделать точный вывод. **66.** a) если число x^2 не кратно 9, то число x не делится на 3; b) если x – нечетно, то его последняя цифра не равна 2; c) если неверно, что $AB \| CD$ и $AD \| BC$, то $ABCD$ – не прямоугольник; d) если $\angle ACB \neq 60°$, то ACB – не является правильным треугольником. **67.** I) если дом имеет дымовую трубу, то он имеет максимум 3 окна; II) если дом имеет более 3 окон, то он не имеет трубу; III) если дом не имеет трубу, то он не может иметь максимум 3 окна; **69.** a) $\exists x\ P(x)$; b) $\exists x\ P(x)$; c) $\forall x\ P(x)$; d) $\forall x\ P(x)$; e) $\forall x\ P(x)$; f) $\forall x\ P(x)$; g) $\forall x\ P(x)$; h) $\forall x\ P(x)$; i) $\exists x\ P(x)$; j) $\exists x\ P(x)$; k) $\forall x\ P(x)$; **70.** a) Сазан– не млекопитающее; b) Все короли имеют недостатки; f) Золото– хороший электропроводник; g) Некоторые позвоночные несут яйца; h) Этот человек болен. **71.** a) y – внук x; b) У каждого человека есть дети; c) Каждый человек – чей-то ребенок. **72.** a) Если некто считает кого-то своим другом, то тот тоже считает его своим другом. b) Для каждого человека существует человек, которого он считает другом; c) Есть такой человек, которого все считают своим другом; d) Для каждого человека существуют люди, которые считают его своим другом; e) Есть такой человек, который считает каждого своим другом; f) Для каждого человека, существует такой человек, который считает его своим другом. **73.** a) Для любого целого числа существует кратное ему число; b) Существует такое целое число, которое делится на все целые числа; c) Для каждого целого числа существует его делитель; d) Существует такое целое число, на которое делятся все целые числа; e) Для всякого целого числа существует его делитель; f) Существует такое целое число, которое делится на все целые числа. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

Глава II.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402.46. **3.** \$2600. **4.** £14 400. **5.** €20219.78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9.41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15.4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512.69; b) \$7293.04; c) £18938.83. **12.** 787.50. **13.** €1418.75. **14.** £1660. **15.** \$274.83. **16.** a) €111.39; b) £763.31; c) ¥77157. **17.** \$9021.58. **18.** €301.26. **19.** a) \$7650; b) \$8151.65; c) \$8243.81.

20.

Годы	Амортизация	Стоимость
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318.75	€1806.25
3	15% €1806.25 = €270.94	€1535.31

Глава III.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) Ø; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) нет корней; e) –1;5; f) –1.
3. a) и b); a) и d); a) и f); b) и d); b) и f); d) и f); c) и e); g) и h).
4. a)(81/11;–3/11); b)(4;4); c)(9;8). **6.** b)(1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 девушек и 60 юношей. **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) Ø; c) 32; d) Ø; **13.** a) Ø; b) $-\frac{23}{16}$.
15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) Ø; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). 25. $\frac{21}{22}$.
26. a) –0,25; b) –4/9; c) –2,5. **28.** c) Ø. d) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.
37. 3 года. **39.** 8 лет. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **43.** a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;
4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$
7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;
10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) Ø. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) Ø. 2) Ø.
61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).
68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. **МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА** 3

Уроки 1-4 Понятие множества. Операции над множествами. Дополнения к множеству 3
Уроки 5-7. Высказывания. Отрицание. Конъюнкция 13
Уроки 8-9. Логическая равносильность. Законы логики 20
Уроки 10-11. Импликация, конверсия, инверсия и контрапозиция 23
Уроки 12-13. Предикаты и кванторы 28
Уроки 14-15. Законы правильного мышления (аргументации). Софизмы и парадоксы 32
Уроки 16-18. Решение задач 38

Глава II. **ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ** 48

Уроки 19-21. Простые проценты, сложные проценты 48
Уроки 22-24. Решение задач 53

Глава III. **ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ** 58

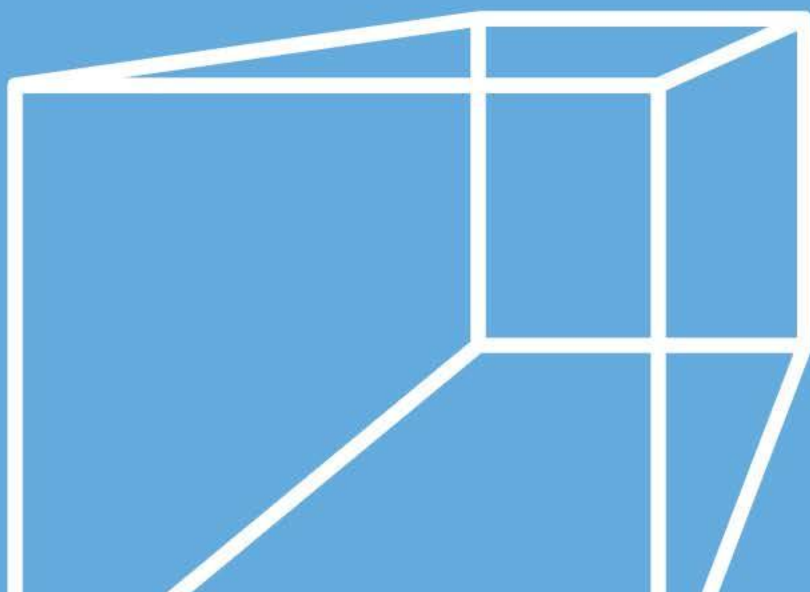
Уроки 25-28. Простые рациональные уравнения и их системы 58
Уроки 29-32. Простые иррациональные уравнения и их системы 64
Уроки 33-36. Показательные уравнения и их системы 69
Уроки 37-38. Приближенное решение уравнений 74
Уроки 39-41. Простые рациональные неравенства и их системы 77
Уроки 42-43. Простые иррациональные неравенства 79
Ответы 86

Учебно-методическая литература и электронные ресурсы, использованные при подготовке учебника и рекомендуемые для дополнительного изучения

1. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov Algebra и analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа.
часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. A.U. Abduhamidov и boshqalar. Algebra и matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. М.И. Исроилов Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Математика в интернете (на анг. яз.).
10. "Математика в школе" журнал.
11. Fizika, matematika и informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001 - yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli и olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I и II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O‘qituvchi", 1979.
14. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O‘qituvchi", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Новостной учебный портал Министерства народого образования.
16. http://www.eduportal.uz – Новостной учебный портал мультимедийного центра.
17. http://www.problems.ru – Система решения математических примеров (на рус. яз.).
18. http://matholymp.zn.uz – Международные Олимпиады по математике.

Математика

ГЕОМЕТРИЯ



10-класс

В 10 классе начинается системное изучение стереометрии – раздела геометрии о пространственных фигурах. В разделе описаны основные пространственные фигуры, многогранники, тела вращения, параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости, а также их свойства.

Теоретический материал в учебнике изложен в простой и понятной форме. Все темы и понятия раскрыты при помощи различных жизненных ситуаций. После каждой темы приведены вопросы, примеры на доказательство, вычисление и построение, которые помогают учащимся мыслить творчески и закрепить полученные знания.

Материалы раздела предназначены для учащихся 10 класса общеобразовательной школы. Также им можно пользоваться для самостоятельного изучения и повторения геометрии.

СОДЕРЖАНИЕ

I часть. **Системное повторение планиметрии**

1. Логическое построение планиметрии....................................97
2. Геометрические задачи и методы их решения 102
3. Практические упражнения и приложения....................................108

II часть. **Введение в стереометрию**

4. Геометрические фигуры в пространстве. Многогранники.............112
5. Тела вращения: цилиндр, конус и шар 116
6. Практические упражнения и приложения. 119

III часть. **Прямые и плоскости в пространстве**

7. Прямые и плоскости в пространстве 126
8. Построение многогранников и их простейших сечений................131
9. Практические упражнения и приложения. 135

Символы, использованные в разделе и их описания:

– описание теоремы

– описание аксиомы

– вопросы по теме

– активизирующие задания

– окончание доказательства теоремы

– практическое задание

– исторические сведения

– геометрические головоломки

I ЧАСТЬ

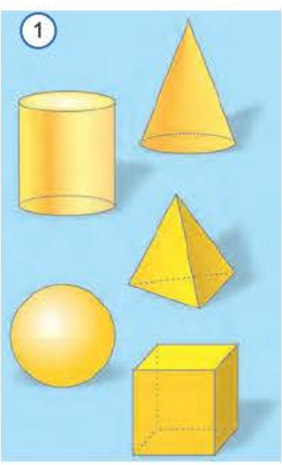
СИСТЕМНОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

1 ЛОГИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия – это наука о пространственной форме и количественных характеристиках предметов реального мира. Прочие свойства предметов изучают другие дисциплины. Если при изучении предмета учитывать только пространственную форму и размеры, то получим абстрактный объект, называемый *геометрической фигурой*.

Слово *"геометрия"* – греческого происхождения и в переводе означает *землеизмерение*. Геометрию, изучаемую в школе, называют *евклидовой* по имени древнегреческого ученого Евклида. Геометрия состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. *Планиметрия* изучает свойства фигур на плоскости, а *стереометрия* – в пространстве (рис. 1).

Чтобы отличать геометрические фигуры друг от друга, их свойства описывают в виде утверждения, которое называют *определением*. Однако, определить все геометрические фигуры невозможно. Некоторые из них, первоначальные, вынуждены принять без определения. Принимаем их за неопределяемые, *начальные (основные) геометрические фигуры*.



Логическое построение геометрии осуществляют в следующем порядке:

1. Вначале принимают основные (начальные) геометрические фигуры без определения;

2. Принимают основные свойства этих фигур без доказательств;

3. Определяют другие геометрические фигуры через основные фигуры и их свойства, а затем доказывают свойства этих фигур и утверждений, истинность которых устанавливается путем доказательств, опираясь на известные.

Такое построение науки называют *аксиоматическим построением*. Свойства фигур, принятые без доказательства, называют *аксиомами*.

В планиметрии, которую мы изучали до сих пор основными геометрическими фигурами были точка и прямая. Их приняли без определения. Но определили отрезок, луч, треугольник и другие геометрические фигуры. Точно так же следующие свойства (утверждения) мы принимаем без доказательств в качестве аксиом:

I. Аксиомы принадлежности

1.1. *Какова бы ни была прямая на плоскости, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.*

1.2. *Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.*

II. Аксиомы расположения

2.1. *Из трех точек, лежащих на прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.*

2.2. *Любая прямая делит плоскость на две части: на две полуплоскости.*

III. Аксиомы измерения

3.1. *Любой отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.*

3.2. *Любой угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Градусная мера развернутого угла равна* $180°$. *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

IV. Аксиомы откладывания

4.1. *На любом луче от его начальной точки можно отложить единственный отрезок, равный данному.*

4.2. *От любого луча в определенную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному, не развернутому углу.*

4.3. *Для любого треугольника существует единственный равный ему треугольник в заданном расположении относительно данного луча.*

V. Аксиома параллельности

5.1. *На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.*

Вывод некоторого утверждения с помощью логических размышлений называют *доказательством*. Утверждение, верность которого установлена с помощью доказательства, называют *теоремой*. Обычно теорема состоит из условия и заключения. В первой части теоремы – условии объясняют что задано. А во второй части – заключении формулируют что требуется доказать.

Евклид
(356–300 года до н.э.)

Доказать теорему – это значит, используя ее условие, опираясь на принятые и доказанные ранее свойства, рассуждая, привести к правильности предложения, сформулированного в заключении. Уточнение условия и заключения теоремы – разъясняет ее, облегчает понимание и доказательство теоремы.

Древнегреческий ученый Платон отметил удивительную закономерность в геометрии: из свойств, изученных и доказанных ранее, логически размышляя и обдумывая, можно получить новые свойства. Следовательно, используя эти удивительные возможности, можно формулировать остальные свойства в виде теорем, которые доказывают с помощью логических размышлений, аксиом, а также свойств, доказанных до этого.

В процессе размышления запрещается использование недоказанных свойств, даже если их правильность очевидна.

Таким образом, если рассматривать геометрию как одно здание, начальные понятия и аксиомы составляют его фундамент. Кирпичи, уложенные на этом фундаменте – это новые определяемые понятия и свойства, доказанные в виде теорем.

В формировании геометрии в качестве самостоятельной науки большой вклад внесли древнегреческие ученые. Например, Гиппократ Хиосский дал разъяснения о первых геометрических понятиях. Наибольший вклад в этой области принадлежит великому древнегреческкому ученому Евклиду (356–300 годы до нашей эры). Его основной труд "Начала" содержит планиметрию, стереометрию и некоторые вопросы теории вероятностей, кроме того, алгебру, основы теории отношений, способы вычисления площадей и объемов и также элементы теории пределов. Евклид в "Началах" собрал все достижения древнегреческих математиков того времени и создал основу для дальнейшего развития математики.

Омар Хайям (1048–1131)

"Начала" состоят из 13 книг и содержат переработанные труды древнегреческих ученых V – IV веков до нашей эры. В нем приведены 23 определения, 5 постулатов и 9 аксиом. В этом труде даны правильные определения прямоугольника, квадрата и окружности. Для точки и прямой приведены следующие определения: "Точка – это то, что не имеет частей", "Линия – это длина без ширины".

В "Началах" приведены 9 аксиом – высказывания, принятые без доказательства. Также приведены следующие 5 математических умозаключений (постулатов), позволяющие осуществлять геометрические построения:

I. Через любые две точки можно провести только одну прямую.

II. Отрезок прямой можно бесконечно продолжить.

III. Из любой точки можно построить окружность произвольного радиуса.

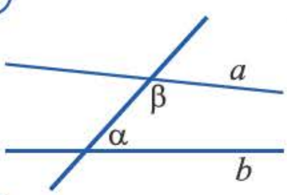
IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересеченные третьей, образуют внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то при продолжении вышеупомянутых прямых они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых углов.

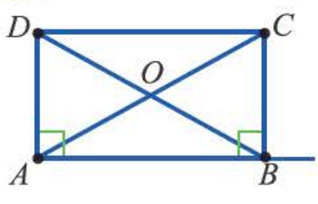
Упомянутый труд получил огромную славу и признание. Особенно V постулат стал причиной большой научной дискуссии. Если обозначить внутренние углы в V постулате α и β (рис. 1), а прямые a и b, то по смыслу этого постулата $\alpha+\beta<180°$, и прямые a и b пересекаются.

Многие ученые, пытаясь доказать постулат V, заменяли его другими равносильными умозаключениями. Например, *аксиома параллельных* английского математика Яна Плейфер (1748–1819) звучит так: На плоскости из точки, расположенной вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

1



2



Математик, поэт, астроном и философ Омар Гиясаддин Абул Фахт ибн Ибрахим Хайям также занимался этой задачей. Хайям в своем сочинении "Комментарии к сложностям в вводной части книги Евклида" остановился на V постулате. Он, пытаясь доказать постулат Евклида как теорему, рассмотрел прямоугольник с двумя прямыми углами в основании и сделал вывод, что, если два угла при нижнем основании прямые, то и углы при верхнем основании должны быть прямыми (рис.2). Хайям говорит: "Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься". Итальянский математик Д. Саккери (1667–1733), не знакомый с работой Омара Хайяма, занимаясь V постулатом, также обратился к прямоугольнику. Данный прямоугольник вошел в основания геометрии под названием "Прямоугольник Хайяма-Саккери".

Н.И.Лобачевский (1792–1856)

Эту проблему решил великий русский математик Николай Иванович Лобачевский, построив неевклидовую геометрию. Лобачевский впервые доказал, что пятый постулат Евклидовой геометрии не связан с другими аксиомами. Эта геометрия полностью отличалась от Евклидовой геометрии. Однако, ни к каким логическим противоречиям это не привело, несмотря на то, что две геометрии не могли существовать одновременно. Несмотря на это, Лобачевский сделал новые результаты, которые также не имели логических противоречий. Новая геометрия и геометрия Евклида полностью совпадали по первым четырем аксиомам. Эта группа аксиом и их следствия назвали абсолютной геометрией.

Однако, неевклидовая геометрия (геометрия Лобачевского) серьезно отличалась от геометрии Евклида. Например, в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов треугольника может быть меньше π, подобных, но неравных треугольников не существует, множество точек, равноудаленных от данной прямой, являются не прямой, а кривой линией и так далее.

В создание неевклидовой геометрии внесли большой вклад венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860) и немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Также большую работу по описанию новой геометрии проделали итальянский ученый Эудженио Бельтрами (1835–1900) и немецкий математик Бернхард Риман (1826–1866).

Начатая Евклидом аксиоматика в некотором смысле получила завершение в работах немецкого математика Давида Гильберта (1862–1943) и русского математика Вениамина Федоровича Кагана (1869–1953).

? *Вопросы к теме*

1. *Что вы знаете о Евклиде, который изложил систему аксиом геометрии?*
2. *Расскажите о сочинении Евклида "Начала".*
3. *Что такое определение? Какие фигуры на плоскости являются основными (начальными), принятыми без определения?*

4. *Чем отличаются друг от друга теорема и аксиома?*
5. *Перечислите и сформулируйте аксиомы планиметрии.*
6. *Как построена геометрия?*
7. *О чем V постулат Евклида и почему его пытались доказать?*
8. *Расскажите об ученых, пытавшихся доказать V поспулат, и их работах.*
9. *В чем заключался вклад Лобачевского при создании новой геометрии?*
10. *Расскажите об ученых, создавших неевклидовую геометрию и их трудах.*

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Как было отмечено ранее, одно из самых замечательных свойств геометрии заключается в возможности создания новых утверждений на основе ранее изученных, доказанных предложений, с помощью рассуждений и логического мышления. С помощью этой замечательной возможности доказываются и оставшиеся утверждения, выраженные в виде теорем или задач, основываясь на аксиомах и ранее доказанных свойствах. На основе этого и появлялись математические или геометрические задачи.

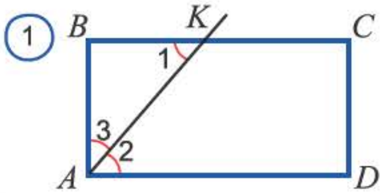
В математической задаче приводятся данные (условия). Используя их, требуется что-то найти (вычислить), или доказать, или построить. Выполнение поставленных требований и является решением задачи.

Геометрические задачи в соответствии с поставленным требованием делятся на вычислительные задачи, на задачи, требующие доказательства, исследовательские задачи и задачи на построение.

Для решения математической задачи знание условия недостаточно. Предполагается также наличие навыков и опыта решения задач. Чтобы добиться таких навыков нужно начать с решения простых задач и последовательно переходить к решению более сложных. Точно также нужно рассматривать различные методы решения и для их успешного усвоения решать много задач. Каждый метод применяется для определенной группы задач. Чем больше методов вы будете применять, тем больше получите навыков решения задач.

Ниже мы остановимся на некоторых наиболее важных методах решения геометрических задач. Методы решения задач по структуре делятся на синтетический, аналитический, доказательства от противного и другие. А по применению аппарата математики делятся на методы: алгебраический, векторный, координатный, вычисления площадей, подобия, геометрического преобразования.

Синтетический метод: используя даные условия задачи строят цепочку логических рассуждений. Цепочку продолжают до тех пор, пока ее последнее звено не совпадет с требованием задачи.



Пример 1. Биссектриса прямоугольника делит его сторону на отрезки длиной 7 см и 9 см (рис. 1). Найдите периметр прямоугольника.

Решение. Пусть $ABCD$ – прямоугольник, AK – биссектриса, $K \in BC$, $BK = 7$ см, $KC = 9$ см (или $BK = 9$ см, $KC = 7$ см).

1. Так как $BC \parallel AD$ и AK секущая, то $\angle 1 = \angle 2$. (1)

как внутренние накрест лежащие углы.

2. AK – биссектриса: $\angle 2 = \angle 3$. (2)

3. Из (1) и (2) следует, что $\angle 1 = \angle 3$.

4. Тогда треугольник ABK рвнобедренный и $AB = BK$. (3)

5. Используя это, в каждом случае выполним следующие вычисления:

1- случай. $AB = BK = 7$ см, $P = 2(AB + BC) = 2\ (7+16) = 46$ (см).

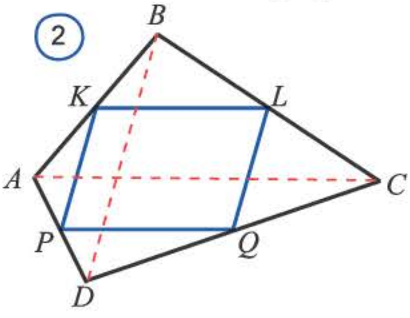
2- случай. $AB = BK = 9$ см, $P = 2(AB + BC) = 2\ (9+16) = 50$ (см). ❑

Эта задача входит в число опорных задач, так как многие задачи составляют на основании аналогичной идеи. Биссектрисы параллелограмма и трапеции отсекают от плоскости этих фигур равнобедренные треугольники. О таких важных фактах нужно помнить всегда. Они очень помогают при решении других задач.

Аналитический метод заключается в том, что, исходя из требования (вывода) утверждения (теоремы или задачи) и опираясь на известное утверждение, строится цепочка логических рассуждений, которая показывает, что требование является следствием условия.

Пример 2. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – четырехугольник (рис. 2), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$. Проведем диагонали AC и BD четырехугольника.



1. KL средняя линия $\triangle ABC$: $KL \parallel AC$ (1);
2. PQ средняя линия $\triangle ADC$: $AC \parallel PQ$ (2);
3. Из (1) и (2) следует: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Аналогично: $KP \parallel LQ$ (4);
5. Из (3) и (4) имеем: $KLQP$ – параллелограмм. ❑

Рассмотренные выше синтетический и аналитический методы также называются ***прямыми методами***. При решении задач прямыми способами сначала анализируется условие задачи. По результатам анализа выбирается метод, после этого строится и разбирается модель (чертеж) задачи в виде рисунка. В таком русле ведется обсуждение и переход от условия задачи к ее решению.

Есть и обратный метод решения задачи. С ним мы часто сталкивались. Называется этод метод "***методом доказательства от противного***". Приведем алгоритм использования этого метода.

Алгоритм применения метода доказательства от противного.

Теорема (прямое утверждение)	***Если имеет место А , то имеет место В.*** ***(А и В – некоторое утверждение)***
Доказательство:	
Предположим обратное:	Предположим утверждение, обратное тому, которое приведено в теореме, т.е., что условия теоремы выполнены, но следствия не имеет места: ***Если имеет место А, то В не имеет место.***
Проведем рассуждения:	Проведем логические рассуждения, основанные на уже доказанных теоремах или принятых аксиомах.
Приходим к противоречию:	Приходим к утверждению, противоречащему уже доказанной теореме или принятой аксиоме.
Делаем вывод:	Значит, наше предположение неверное, т.е. данная теорема верна.
Теорема доказана	

Пример 3. Если каждая из двух прямых параллельна третьей, то они параллельны между собой.

Пусть заданны прямые a и b, и пусть каждая из них параллельна третьей прямой c. Докажем теорему методом доказательства от противного.

3

Доказательство. Предоложим противное: Пусть каждая из прямых a и b параллельна третьей прямой c, но сами прямые не параллельны друг лругу, то есть они пересекаются в некоторой точке A (рис. 3). Тогда через точку A прямой c проходят две прямые a и b, параллельные ей. Это противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, предположение было неверным. Значит, если каждая из двух прямых a и b параллельна третьей прямой c, то эти прямые параллельны между собой. ❑

Вышеприведенный метод основан на следующем логическом законе: из двух противоречащих друг другу утверждений только одно верно, а другое ложно, третьего не дано.

Теперь рассмотрим другие методы решения геометрических задач.

Алгебраический метод

При решении геометрических задач алгебраическим методом целесообразно пользоваться следующим алгоритмом:

1) проанализировать содержание задачи и построить модель его чертежа;

2) обозначить неизвестные буквами;

3) по условию задачи составить уравнение или систему уравнений;

4) решить составленные уравнения или системы уравнений;

5) проанализировать полученное решение;

6) написать ответ.

Пример 4. Периметр прямоугольного треугольника равен 36 см. Отношение гипотенузы к катету равно 5 : 3. Найдите стороны треугольника.

Пусть задан ΔABC, где $\angle C = 90°$, $P = 36$ см, $AB : AC = 5 : 3$.

Решение. Обозначим коэффициент пропорциональности буквой k.

Тогда $AB = 5k$, $AC = 3k$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Откуда, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

По условию задачи: $P = 36$ см, $P = AB + AC + BC$.

Следовательно, $5k + 3k + 4k = 36$. Откуда, $k = 3$;

Тогда, $AB = 5k = 15$ (см), $AC = 3k = 9$ (см), $BC = 4k = 12$ (см).

Ответ: 15 см, 9 см, 12 см. ❑

Метод площадей

При решении некоторых геометрических задач применение формул вычисления площадей быстро приводит к ожидаемому результату. В этом случае требуемые в задаче неизвестные находят из уравнения, полученного в результате уравнивания площадей вспомогательных фигур. В этом случае требуемые в задаче неизвестные находят из уравнения, полученного в результате уравнивания площадей вспомогательных фигур. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 5. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите высоту, которая опущена на сторону, равную 14 см.

Решение. Пусть задан треугольник ΔABC, где $a < b$, $b < c$, т.е. $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см и h_b – искомая высота.

По формуле Герона: $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (см^2).

По другой формуле имеем: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b$.

Тогда, $\frac{1}{2}\, b \cdot h_b = 84$. Откуда, $h_b = \frac{84}{2b} = 12$ (см). *Ответ:* 12 см. ❑

Векторный метод

При решении геометрических задач векторным методом целесообразно пользоваться следующим алгоритмом:

1) перевести задачу на язык векторов, то есть рассмотреть некоторые величины (отрезки), заданные в задаче как векторы, составить векторное равенство;

2) используя свойства действий над векторами преобразовать векторные равенства и найти неизвестное;

3) вернуть с векторного языка на геометрический;

4) записать ответ.

Метод векторов используется при решении задач, в которых требуется:

а) доказать параллельность прямых (отрезков);

б) поделить отрезки в заданном отношении;

в) показать, что три точки лежат на одной прямой;

г) показать, что четырехугольник является параллелограммом (ромбом, трапецией, квадратом, прямоугольником).

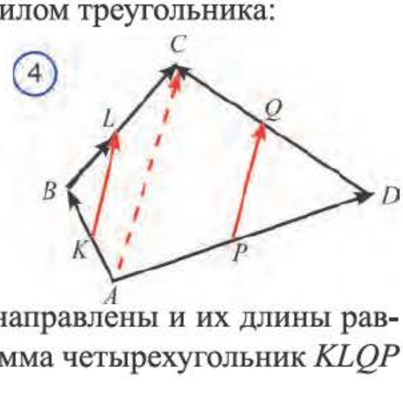
Пример 6. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Пусть $ABCD$ заданный четырехугольник, где $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ (рис. 4).

Доказательство. 1. Заменив отрезки соответствующими векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$, запишем задачу векторным языком;

2. Используем для сложения векторов правилом треугольника:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$



Зная, что $\overline{KB} = \frac{1}{2}\, \overline{AB}$ и $\overline{BL} = \frac{1}{2}\, \overline{BC}$,

получаем $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\, \overline{AB} + \frac{1}{2}\, \overline{BC} =$

$= \frac{1}{2}\, (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\, \overline{AC}$.

Аналогично, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\, \overline{AC}$.

3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, то есть эти векторы одинаково направлены и их длины равны. Следовательно, по признаку параллелограмма четырехугольник $KLQP$ является параллелограммом. ❑

Метод координат

При решении геометрических задач методом координат целесообразно пользоваться следующим алгоритмом:

1) проанализировать содержание задачи и записать геометрическую задачу на языке координат;

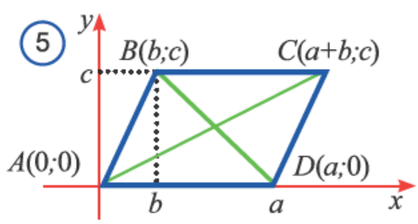
2) преобразовать выражение и вычислить его значение;

3) перевести результат на геометрический язык и записать ответ.

Методом координат чаще всего решают следующие задачи: а) на нахождение геометрических мест точек; б) на доказательство зависимости между линейными элементами геометрических фигур.

При решении задач методом координат важно рационально выбрать систему координат. Данную фигуру следует разместить относительно осей координат таким образом, чтобы как можно больше координат нужных точек равнялись нулю или одному и тому числу.

Задача 7. Докажите, что параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.



Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы вершины параллелограмма имели следующие координаты (рис. 5):

$A(0;\ 0),\quad B(b;\ c),\quad C(a+b;\ c),\quad D(a;\ 0),\quad$ где $a > 0,\ b \geq 0,\ c > 0.$

Выразим расстояния между точками A, B, C, D через их координаты:

$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2},\quad BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}.$

Где $\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$

или $(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2.\qquad$ Отсюда, $4\,a \cdot b = 0.$

Но $a > 0$, тогда $b = 0$. Это, в свою очередь, означает, что точка $B\ (b;\ c)$ лежит на оси Oy. Поэтому ΔBAD прямоугольный.

Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. ❑

Метод геометрических преобразований: метод поворота, метод симметрии, метод параллельного переноса и метод гомотетии. При решении задач методом геометрических преобразований наряду с данными геометрическими фигурами рассматриваются и фигуры, полученные в результате определенного преобразования. Определяются свойства новых фигур и переносятся на данную фигуру. Затем выбирается способ решения задачи.

Все приведенные выше методы, где используется больше свойств геометрических фигур, называются геометрическими методами.

Важное напоминание!

Материал, приведенный в данном разделе, необходим для повторения планиметрии. Задач для повторения очень много. Возможно не получится рассмотреть все в классе. Независимо от этого, советуем вам решать их самостоятельно.

? Вопросы к теме

1. *Что вы понимаете под математической задачей?*
2. *Какие виды геометрических задач вы знаете?*
3. *Какие методы решения задач вы знаете?*
4. *Расскажите о синтетическом и аналитическом методах решения геометрических задач.*
5. *Что вы знаете о прямом и обратном методах решения задач?*
6. *В чем заключается метод доказательства от противного?*
7. *Объясните алгоритм решения геометрических задач аналитическим методом.*
8. *Объясните алгоритм решения геометрических задач векторным методом.*
9. *Какие задачи обычно решают векторным методом?*
10. *Объясните алгоритм решения геометрических задач методом координат.*
11. *Какие задачи обычно решают методом координат?*
12. *Объясните метод геометрических преобразований.*

3 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. При пересечении двух прямых образованы четыре угла (рис. 1). Найдите соответствие между каждым условием ($A – E$) и выводом, следующим из него (1 – 5) :

A) $\angle 1 = \angle 3$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
E) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ и $\angle 4$ – смежные;
4) $\angle 1$ и $\angle 3$ – острые;
5) $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные.

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Ниже приведены градусные значения некоторых углов (1–7). Определите, какие пары этих углов могут быть смежными.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28° ; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 и 2; *B*) 2 и 6; *C*) 3 и 4; *D*) 1 и 7; *E*) 2 и 5.

1.3. Найдите верное утверждение. если $\angle 1 = \angle 7$ (см. рис 2).

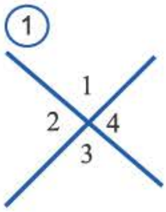
A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) *a* и *b* не пересекаются;

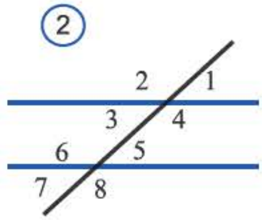
1.4. Если на рисунке 3 $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = 72^\circ$, то $\angle 3 = ?$

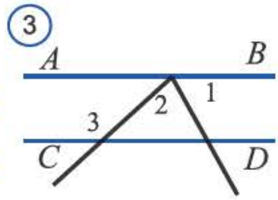
A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

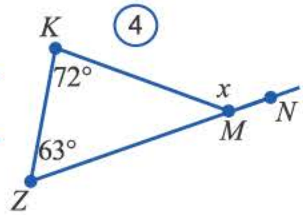
1.5. Найдите угол между биссектрисой и боковой стороной равнобедренного треугольника, если отношение углов в треугольнике равно 3 : 4 : 3.

A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.









1.6. Найдите градусную меру внешнего угла *KMN* треугольника *KMZ*, изображенного на рисунке 4.

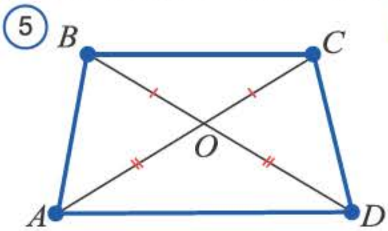
A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

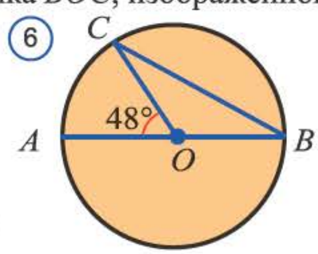
1.7. Определите верные равенства (рис. 5).

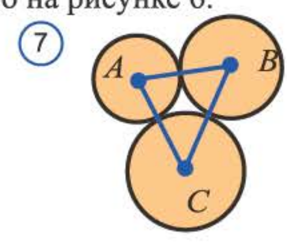
A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. Найдите углы треугольника *BOC*, изображенного на рисунке 6.







A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°;

E)42°,90°,48°; *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Даны три попарно касающиеся окружности с радиусами 6 см, 7 см и 8 см, центры которых являются вершинами треугольника (рис. 7).
Найдите периметр этого треугольника.

A) 28 см; *B*) 29 см; *C*) 27 см; *D*) 42 см; *E*) 21 см.

1.10. Сторона квадрата равна $20\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Одно из оснований трапеции на 8 см длинее другого, а средняя линия равна 10 см. Найдите меньшее основание трапеции.

A) 2 см; *B*) 4 см; *C*) 6 см; *D*) 8 см; *E*) 10 см.

1.12. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 10 м и 36 м.

A) 90 $м^2$; *B*) 92 $м^2$; *C*) 180 $м^2$; *D*) 184 $м^2$; *E*) 36 $м^2$.

1.13. Найдите угол между прямыми a и b на рисунке 8, если прямые m и n параллельны.‘

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

1.14. Найдите площадь треугольника на рисунке 9.

A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

1.15. По рисунку 10 найдите сторону *BC* треугольника *ABC*, вписанного в окружность радиуса *R*.

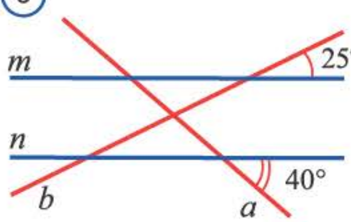
A) R; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

1.16. Найдите длину окружности, стягивающей круг, с площадью 9π $см^2$.

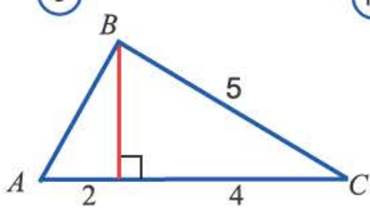
A) 3π см; *B*) 9π см; *C*) 12π см; *D*) 18π см; *E*) 6π см.

1.17. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 6 см.

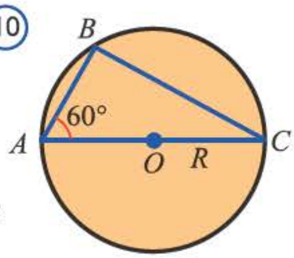
8



9



10



A) 9π $см^2$; *B*) 144π $см^2$; *C*) 36π $см^2$; *D*) 72π $см^2$; *E*) 18π $см^2$.

1.18. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 5 см. Найдите диагональ квадрата.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Найдите число сторон правильного многоугольника, если сумма его внутренних углов равна 1600°.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 18 см.

A) 120 см; *B*) 60 см; *C*) 84 см; *D*) 108 см; *E*) 144 см.

1.21. Одна из сторон параллелограмма, периметр которого равен 48 дм, на 8 дм длинее другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

A) 8 дм; *B*) 16 дм; *C*) 6 дм; *D*) 12 дм; *E*) 10 дм.

1.22. На рисунке 11 вне равнобедренного треугольника *ABC* построили два равных внешних угла ABM и CBK. Стороны этих углов пересекают прямую AC в точках M и K соответственно. Докажите равенство треугольников MBC и KBA.

1.23. Определите взаимное расположение прямых AB и CD, изображенных на рисунке 12. Обоснуйте свой ответ.

1.24. В треугольник ABC на рисунке 13 вписана окружность. Точки касания окружности N и Z делят стороны треугольника AB и AC на отрезки, разности которых равны 3 см и 4 см соответственно ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 28 см.

1.25. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность радиуса $3\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной окружности.

1.26. Вокруг равнобедренной трапеции, угол при основании которой 30°, описана окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если её высота равна 7 см.

1.27. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция с углом при основании 150°. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна $16\sqrt{3}$.

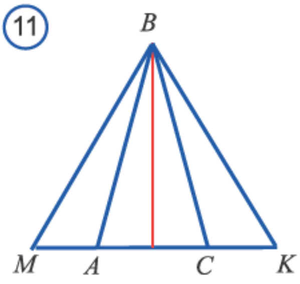
1.28. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 16 см и высотой, опущенной на это основание, 15 см.

1.29. Высота AO треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BO OC. Найдите сторону OC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см и $B = 45^\circ$.

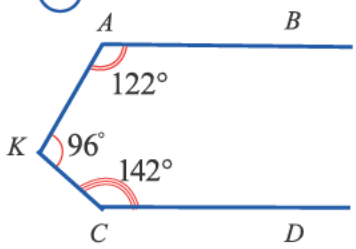
1.30. Сторона ромба равна 10 см, а одна из диагоналей 12 см. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

1.31. Через точку, расположенную на расстоянии 12 см от центра окружности с радиусом 15 см, проведена хорда. Найдите длину хорды.

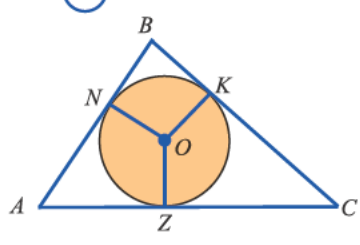
11



12



13



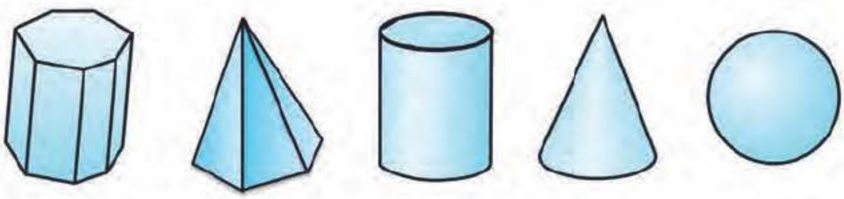
ЧАСТЬ II

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. МНОГОГРАННИКИ

Известно, что фигуры делятся на плоские и пространственные, в зависимости от того, расположена фигура только на плоскости или в пространстве. До сих пор мы на уроках геометрии, в основном, изучали свойства плоских фигур. В конце 9 класса мы рассмотрели свойства некоторых пространственных фигур: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара (рис.1). В планиметрии изучают свойства плоских фигур, а в *стереометрии* – свойства пространственных фигур. Стереометрия (от греческого "stereos" – "пространственный", "metreo" – "измеряю").

1



2

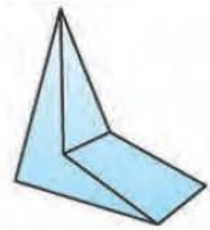
Предметы, изображенные на рисунке 2, как символы пространственных тел, дают представление о них. Все предметы окружающего нас мира имеют три измерения, их форма похожа на какую-нибудь геометрическую фигуру. Вы познакомились с такими фигурами в конце 9 класса. Теперь начинаем системное изучение курса стереометрии. Сначала вкратце напомним некоторые сведения об элементах пространственных фигур.

Многогранник – это пространственное тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники называют *гранями многогранника,* их вершины – *вершинами многогранника,* а стороны – *ребрами многогранника*. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют *диагональю многогранника* (рис. 3).

3

Границу многогранника называют его *поверхностью.* Многогранник делит пространство на две части. Одну из них, бесконечную, называют *внешней областью,* а ограниченную часть *внутренней областью многогранника*.

4



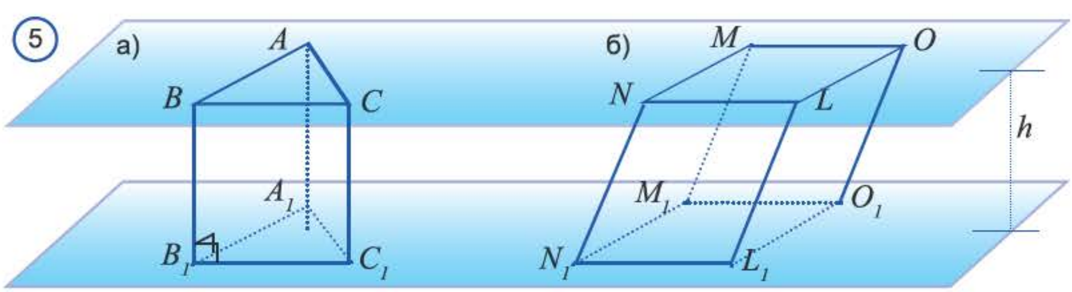
Если многогранник расположен по одну сторону от плоскости, проходящей через любую его грань, то многогранник называют *выпуклым многогранником.* Например, куб – выпуклый многогранник. На рисунке 4 изображен многогранник, не являющийся выпуклым. Позже мы будем изучать простейшие многогранники: призмы и пирамиды.

Многогранник, две грани которого, являются равными многоугольниками, а остальные – параллелограммами, называют *призмой* (рис. 5). Равные грани называют *основаниями*, а параллелограммы *боковыми гранями* многогранника (рис. 6).

По числу сторон в основании многогранники разделяют на *треугольные, четырехугольные и т.д. n-угольные призмы.*

На рисунке 5.а изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ на рисунке 5.б – четырехугольная призма $MNLOM_1N_1L_1O_1$.

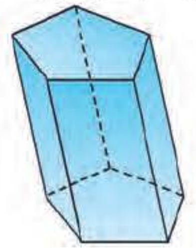
5



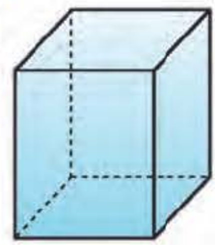
Если боковая грань призмы перпендикулярна основанию, то ее называют *прямой призмой,* если не перпендикулярна, то *наклонной призмой.*

6

7



8



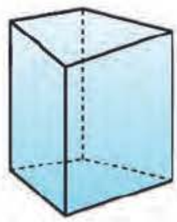
Если основания прямой призмы являются правильными многоугольниками, то его называют *правильной* (рис. 8).

Призма, основанием которой является параллелограмм, называют *параллелепипедом* (рис. 9). Параллелепипеды. как и призмы, могут быть прямыми и наклонными. Прямой параллелепипед с прямоугольным основанием называют *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 10). Ясно, что все грани прямоугольного параллелепипеда будут прямоугольниками.

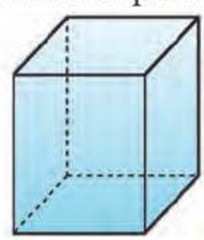
Три ребра прямоугольного параллелепипеда, исходящие из одной вершины, называют его *измерениями*.

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется *кубом.* Ясно, что гранями куба являются равные квадраты.

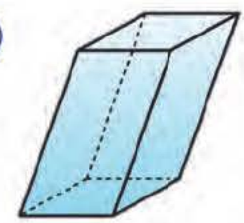
9



10

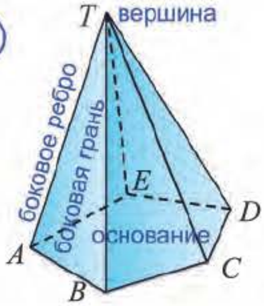


11

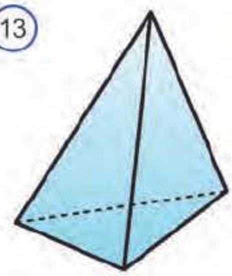


Многогранник, одна из граней которого является многоугольником, а остальные – треугольниками, называют *пирамидой*. Многоугольник называют *основанием*, а треугольники – *боковыми гранями*. На рисунке 12 изображена пятиугольная пирамида $TABCDE$. Пятиугольник $ABCDE$ – основание пирамиды, треугольники ATB, BTC, CTD, DTE и ETA – ее боковые грани, а T – ее вершина.

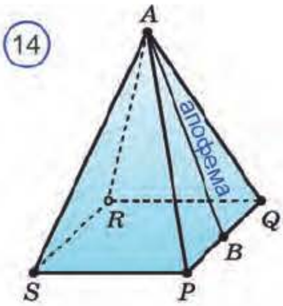
12



13



14



По числу сторон основания различают *треугольные, четырехугольные и т.д. n-угольные пирамиды*.

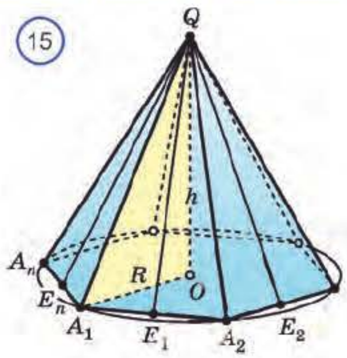
На рисунке 13 изображена треугольная, а на рисунке 14 – четырехугольная пирамида.

Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, перпендикулярен любой прямой, проведенной в плоскости основания через этот центр, то ее называют *правильной пирамидой.*

Высоту боковой грани, опущенную из вершины правильной пирамиды, называют *апофемой*. На рисунке 14 изображена правильная пирамида *APQRS.* Отрезок АВ является апофемой этой пирамиды.

Теорема 1.1. В правильной пирамиде: а) боковые грани; б) боковые ребра; в) апофемы равны между собой.

15



Доказательство. Пусть $QA_1A_2... A_n$ правильная пирамида, а O центр ее основания (рис. 15).

а) Отрезки OA_1, OA_2, ... OA_n являются радиусами, описанной в правильный многоугольник окружности, поэтому они равны между собой. Так как в прямоугольных треугольниках QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n равны по два катета, то они равны между собой. Тогда их гипотенузы также будут равными: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

б) Так как боковые ребра правильной пирамиды $QA_1A_2... A_n$ равны между собой, то её боковые грани являются равнобедренными треугольниками. А в силу того, что основания этих треугольников являются сторонами правильного многоугольника, то и они равны между собой.

Следовательно, боковые грани пирамиды равны по трем сторонам.

в) Так как боковые грани правильной пирамиды равны, то апофемы, проведенные из вершины Q, также равны между собой.

Следовательно, в правильной пирамиде апофемы равны между собой. □

Теорема 1.2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на ее апофему.

Доказательство. Пусть $QA_1A_2... A_n$ правильная пирамида (рис. 15). Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней. А ее боковые грани – это равные между собой равнобедренные треугольники. В свою очередь, высоты этих треугольников – это также равные между собой апофемы:

$$QE_1 = QE_2 = ... = QE_n.$$

Отсюда $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA_1} =$

$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$$

$$= \frac{1}{2} QE_1 \left(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1 \right) = p \cdot a,$$

где p – полупериметр основания пирамиды, a – апофема пирамиды. ❑

Вопросы к теме

1. *Какие геометрические фигуры а) плоские; б) пространственные?*
2. *Какое тело называют многогранником? Определите его элементы.*
3. *Какое тело называют призмой? Определите ее элементы.*
4. *Какие виды призм вы знаете?*
5. *Сформулируйте определение прямоугольного параллелепипеда.*
6. *Какое тело называют пирамидой? Определите ее элементы*
7. *Какие виды пирамид вы знаете?*
8. *Сформулируйте свойства правильной пирамиды.*

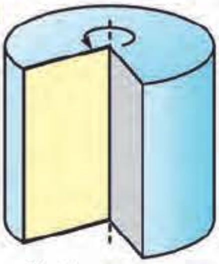
5 ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ: ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

Еще один важный класс пространственных фигур – это тела вращения. В него входят цилиндр, конус и шар.

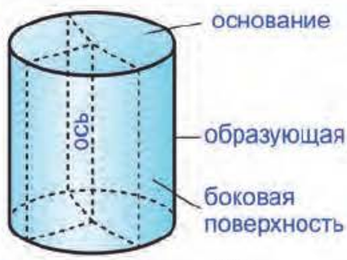
Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из своих сторон, называется *цилиндром* (рис. 16 – 18).

При таком вращении одна из сторон прямоугольника остается непо-

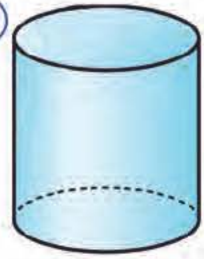
16



17



18



движной. Ее называют *осью цилиндра* (рис. 17).

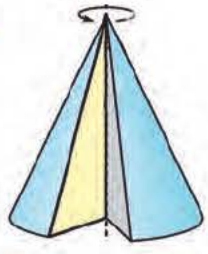
Сторона, противоположная оси, *поверхность цилиндра*, а саму сторону называют *образующей цилиндра*.

Каждая из оставшихся сторон прямоугольника при этом вращении образует круговую поверхность. Эти круги называют *основаниями цилиндра*.

Тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов, называют *конусом* (рис. 19 – 21). А этот катет *осью конуса*.

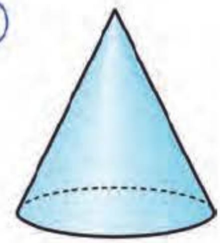
Другой катет прямоугольного треугольника образует при этом вращении круг, называемый *основанием*, гипотенуза образует *боковую поверхность конуса*, а саму гипотенузу называют *образующей конуса.* Кроме того, неподвижную вершину треугольника называют *вершиной конуса* (рис. 20).

19



20

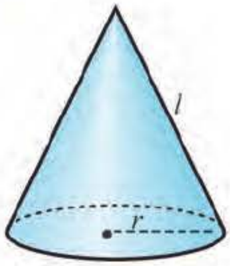
21



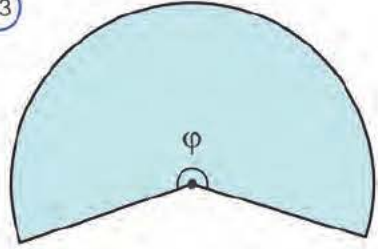
Теорема 1.3. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на его образующую.

Доказательство. *Пусть заданы радиус основания конуса* r и образующая l (рис 22). Развернем боковую поверхность конуса на плоскость. В результате получим сектор круга радиуса l (рис. 23). Найдем центральный угол φ этого сектора (рис. 21). Этот угол опирается на дугу сектора, равного длине окружности основания – $2\pi r$.

22



23



Известно, что, длина окружности радиуса l равна $2\pi l$ и она стягивает центральный угол в 360°. В результате получим пропорцию:

центральный угол в φ° – дуга, равная $2\pi r$;

центральный угол в 360° – дуга, равная $2\pi l$.

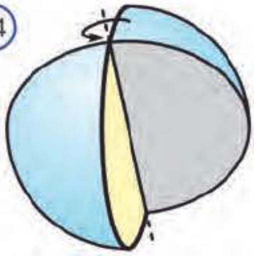
Откуда $\varphi = \frac{360^0}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^0 \cdot r}{l}$.

Теперь найдем площадь S сектора радиуса l с центральным углом φ:

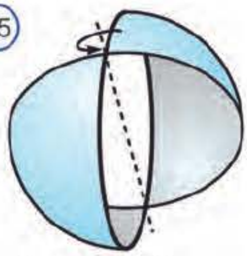
$$S = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \varphi^\circ = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \frac{360^0 \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \ \square$$

Тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра, называют *шаром* (рис. 24). Поверхность, полученную при этом вращении, называют *сферой*. На рисунках 25 и 26 изображена сфера.

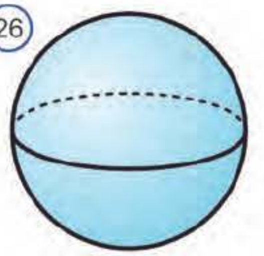
24



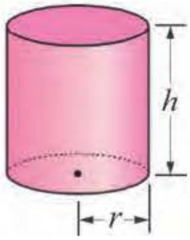
25

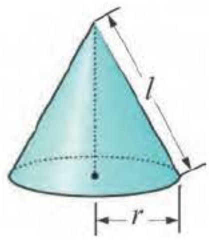


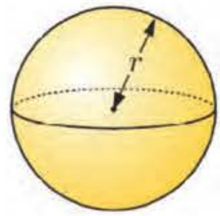
26



Формулы площадей боковой и полной поверхностей тел вращения:







Цилиндр

$S_{бок.} = 2\pi rh$

$S_{пол.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Конус

$S_{бок.} = \pi rl$

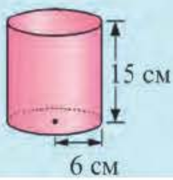
$S_{пол} = S_{осн.} + S_{бок.}$

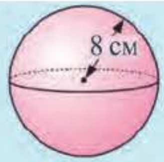
$= \pi r^2 + \pi rl$

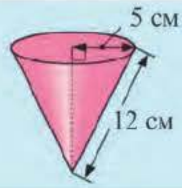
Шар

$S = 4\pi r^2$

Пример. Найдите площади боковых поверхностей следующих тел.







$S_{бок.} = 2\pi rh = 2\cdot 3,14\cdot 6\cdot 15 = 565,5$ (см²)

$S = 4\pi r^2 = 4\cdot 3,14\cdot 8^2 = 804,2$ (см²)

$S_{пол.} = \pi rl + \pi r^2 = 3,14\cdot 5\cdot 12 + 3,14\cdot 5^2 = 267$ (см²).

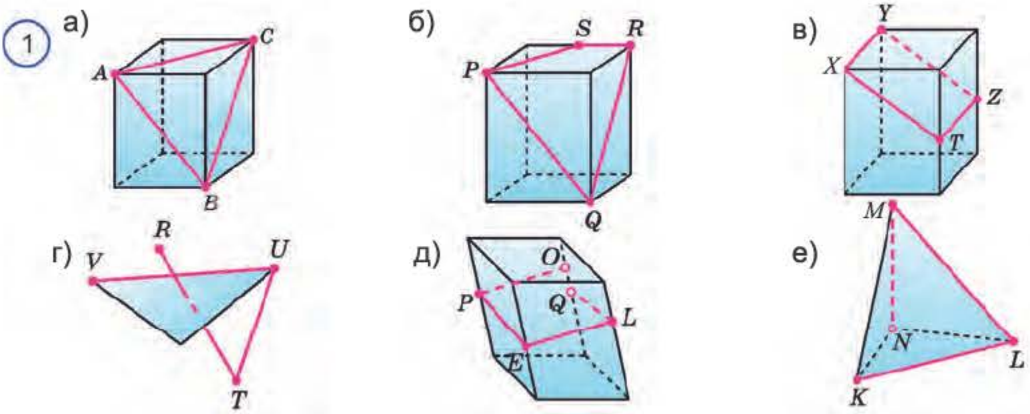
Вопросы к теме

1. Приведите примеры тел вращения.
2. Какое тело называют цилиндром? Определите его элементы.
3. Какое тело называют конусом? Определите его элементы.
4. Какое тело называют шаром? Определите его элементы..

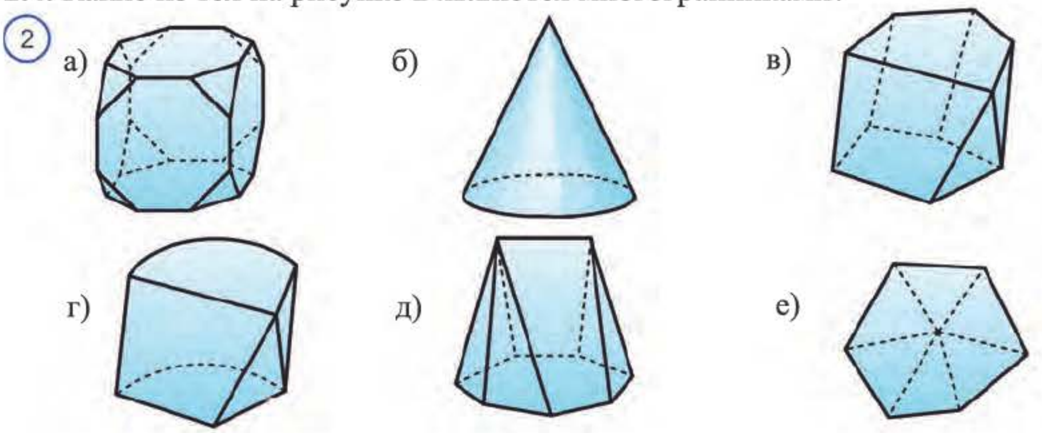
2.1. Докажите, что боковые грани прямой призмы – прямоугольники.

2.2. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро.

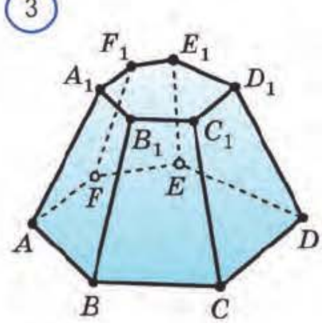
2.3. Какая пространственная ломаная изображена на рисунке 1?



2.4. Какие из тел на рисунке 2 являются многогранниками?



2.5. На рисунке 3 изображен многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Назовите: а) грани с общим ребром CD; б) грани с общим ребром DD_1; в) грани с общей вершиной E; г) грани с общей вершиной C_1; д) ребра с общей вершиной A; е) ребра с общей вершиной F_1.



2.6. Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Сторона ромба равна 8 м, а диагональ 24 м. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.7. Докажите, что все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

2.8. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а ребро равно 11 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2.9. Сторона основания правильной n-угольной призмы равна a, а ребро h. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы. Если: а) $n=3$, $a=5$, $h=10$; б) $n=4$, $a=10$, $h=30$; в) $n=6$, $a=18$, $h=32$; г) $n=5$, $a=16$, $h=25$.

2.10. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15, а длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, равна 12. Найдите: а) боковое ребро и сторону основания пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды; в) площадь полной поверхности пирамиды.

2.11. Основание правильной четырехугольной пирамиды равно 12 см, а длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, 16 см. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.

2.12*. Параллелограмм $EFGH$ со сторонами 10 см и 18 см и площадью 90 см^2 является основанием пирамиды $REFGH$. Длина отрезка, соединяющая R вершину призмы с точкой O пересечения диагоналей пирамиды, равна 6 см и препендикулярен этим диагоналям. Найдите: а) боковые ребра; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.

2.13*. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 8 и 10 и меньшей диагональю 6. Длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей, равна 4 см. Найдите: а) боковые ребра; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.

2.14*. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см. Длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, равна $\sqrt{69}$. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.

2.15. Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна 150 м^2, а боковое ребро 10 м. Найдите площадь основания пирамиды.

2.16. Докажите, что боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на образующую цилиндра.

2.17. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра по радиусу его основания и образующей. а) 7 см и 12 см; б) 12 см и 7 см; в) 1 м и 12 м; г) 0,7 м и 1,2 м.

2.18. Найдите площадь основания цилиндра, если его боковая поверхность равна 300 см^2, а образующая 6 см.

2.19. Найдите полную поверхность цилиндра, если его боковая поверхность равна 90π см^2, а образующая 5 см.

2.20. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, а образующая равна длине

4

окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2.21. Образующая цилиндра на 12 см длиннее радиуса его основания. Площадь полной поверхности цилиндра равна 128 см^{2}. Найдите образующую цилиндра и радиус его основания.

2.22. Нужно покрасить бак в форме цилиндра, изображенный на рисунке 4. Сколько краски потребуется для этого, если высота бака равна 2,5 м, диаметр основания 1,2 м и толщина слоя краски 0,1 мм?

5

2.23. Сколько жести потребуется на изготовление трубы, изображенной на рисунке 5, длина которой равна 25 м, а диаметр 6 м? Учитывать, что на швы расходуются 2,5 % площади боковой поверхности трубы.

2.24. Радиус основания конуса равен 12 мм, длина отрезка, соединяющего вершину конуса с центром его основания равна 35 мм. Найдите боковую поверхность конуса.

2.25. Найдите боковую поверхность конуса, если диаметр его основания равен 32 см, а длина отрезка, соединяющего вершину конуса с центром его основания равна 63 см.

2.26*. Образующая конуса равна l, а угол, который она образует с плоскостью основания, равен α. Найдите площадь основания конуса, если:
а) $l = 10$ см, $\alpha = 30^{\circ}$; б) $l = 24$ дм, $\alpha = 45^{\circ}$; г) $l = 5$ м, $\alpha = 60^{\circ}$.

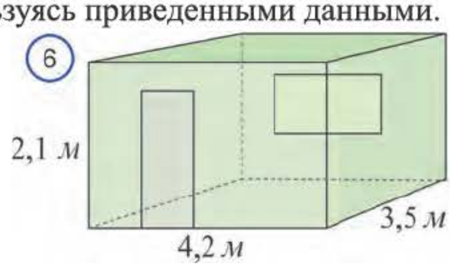
2.27*. Образующая конуса равна l и она составляет с радиусом основания угол α. Найдите полную поверхность конуса, если:
а) $l = 18$ см, $\alpha = 30^{\circ}$; б) $l = 20$ дм, $\alpha = 45^{\circ}$; в) $l = 2,4$ м, $\alpha = 60^{\circ}$.

2.28*. Найдите боковую поверхность конуса, если радиус его основания и образующая соответственно равны:
а) 11 см и 8 см; б) 8 мм и 11 мм; в) 3 м и 18 м; г) 2,7 м и 1,2 м.

2.29. Нужно отремонтировать комнату, изображенную на рисунке 6. В комнате имеются дверь с измерениями 0,8 м на 2,2 м и окно с измерениями 183 см и 91 см. Дверь нужно покрасить с двух сторон. В таблице приведены цены на краску двух видов. Вычислите необходимые средства для экономного ремонта комнаты, пользуясь приведенными данными.

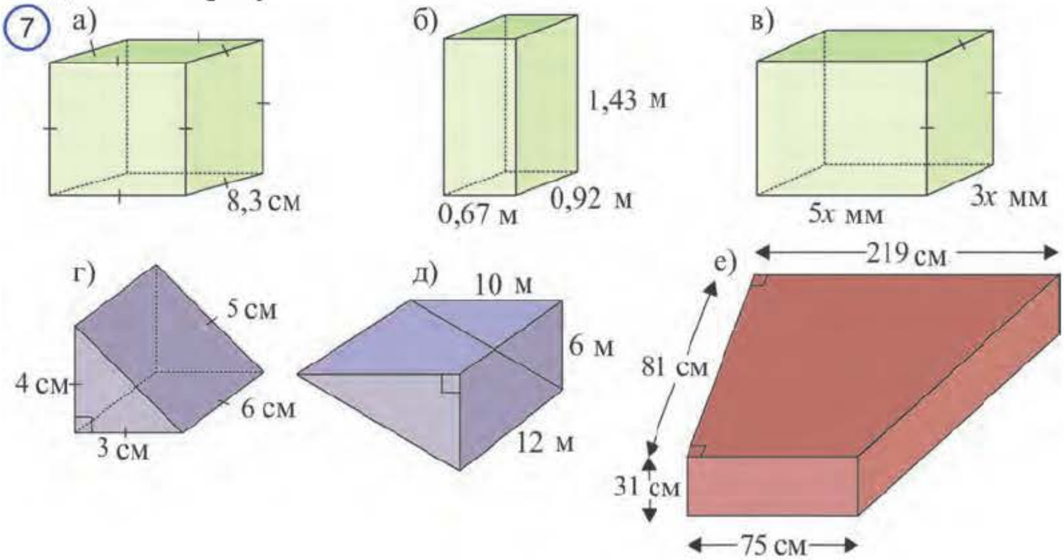
Вид краски	Объем	Площадь покраски	Цена
Для стен	*4 l*	*16 м²*	*32450 сум.*
	2 l	*8 м²*	*20800 сум.*
Для двери	*2 l*	*10 м²*	*23600 сум.*
	1 l	*5 м²*	*15400 сум.*

6

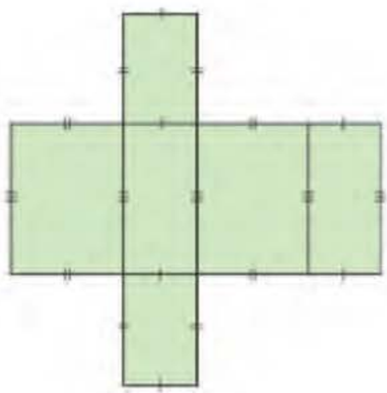


2.30. Найдите площадь полной поверхности многогранников, используя данные на рисунке 7.

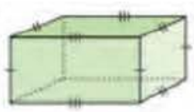
7



2.31. Найдите полную поверхность параллелепипеда по его развертке, изображенной на рисунке 8.

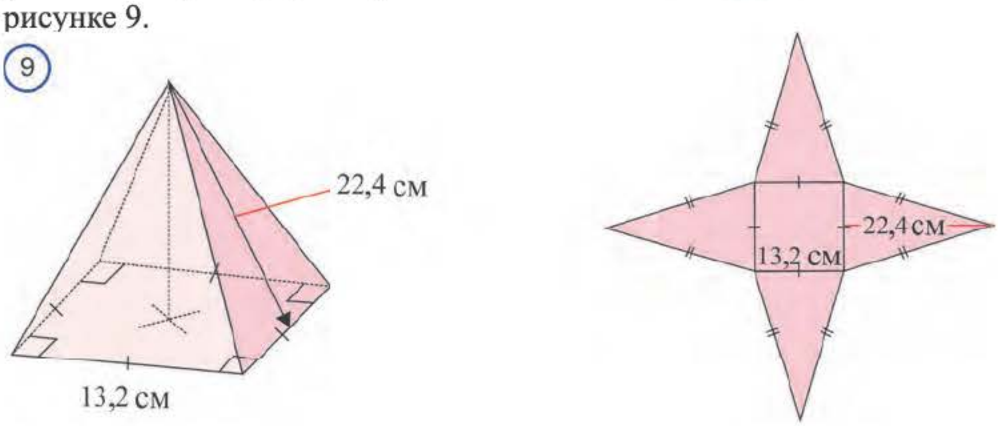


8



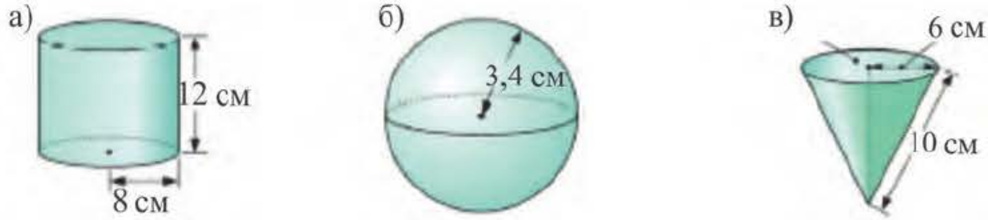
2.32. Найдите формулу вычисления полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, изображенной на рисунке 9.

9



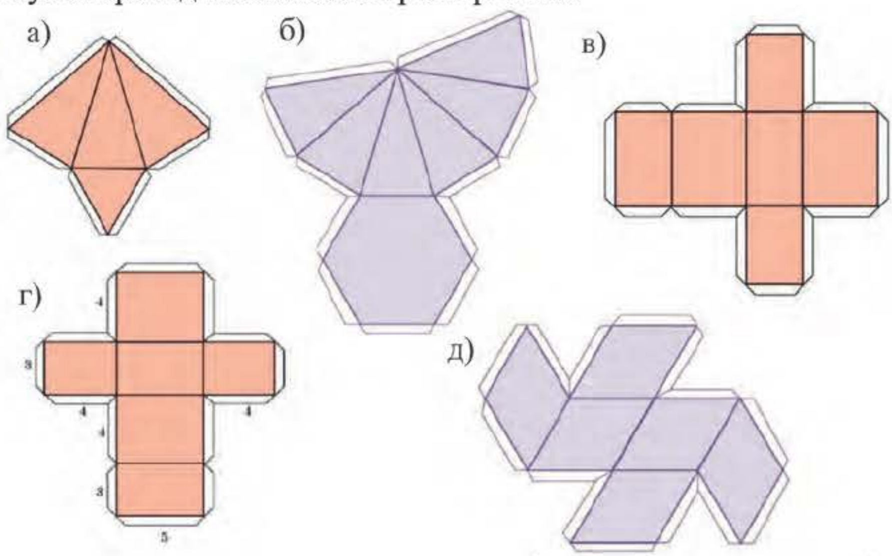
2.33. Найдите полную поверхность тел вращения, изображенных на рис. 10.

10



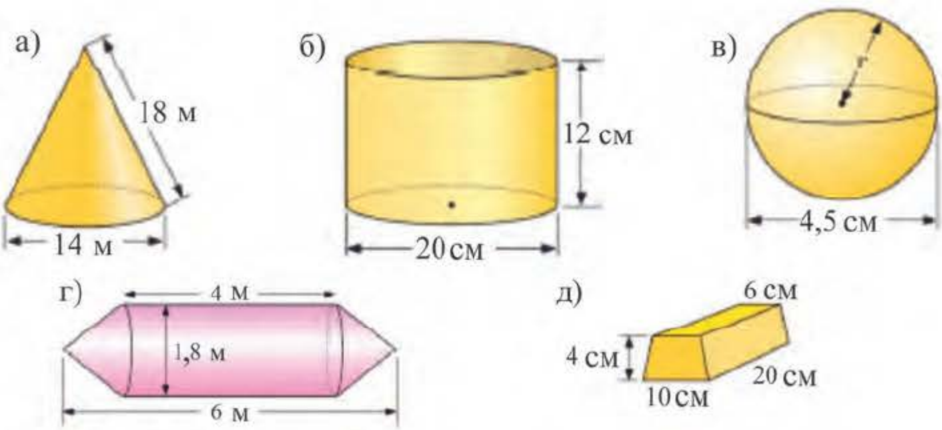
2.34. Чтобы лучше представить себе пространственные фигуры целесообразно пользоваться их моделями. Используя развертки многогранников, можно построить их модели (рис. 11). Вы видите, что развертки многогранников составлены из плоских геометрических фигур. Постройте модели прямоугольного параллелепипеда, куба и пирамид, пользуясь приведенными ниже развертками.

11

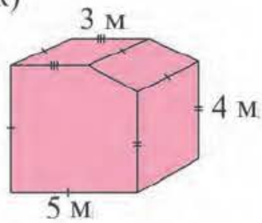


2.35. Найдите полные поверхности тел, изображенных на рисунке 12.

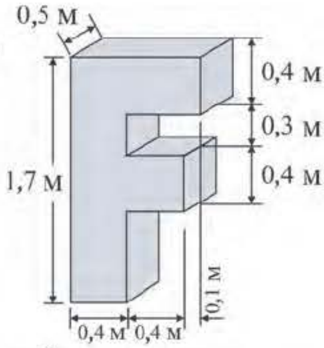
12



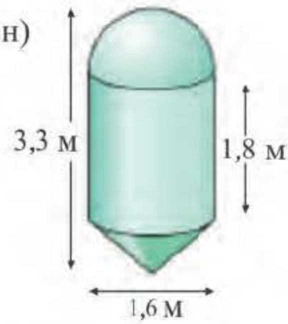
к)



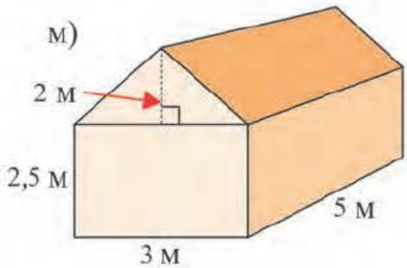
л)



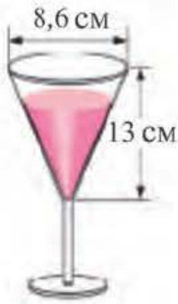
н)



м)



о)



п)

Геометрическая красота

В древности, при создании памятников архитектуры, наши предки обладали серьезными геометрическими знаниями и умениями. Это можно увидеть на примере исторических памятников, построенных на площади Регистан в городе Самарканде (рис. 1).

Какие геометрические фигуры вы видите на фотографии комплекса Ичан-Кала в городе Хива (рис. 2)?

Тадж-Махал – одно из семи чудес света (рис. 3), исторический памятник, построенный падишахом Империи Бабуридов Шах-Джахоном в городе Агра, в Индии. Конечно же создатели этого мавзолея-мечети обладали отличными знаниями геометрии.

3

4

Сиднейский оперный театр в Австралии – выдающееся сооружение современной архитектуры (рис. 4). Он привлекает внимание своим удивительным геометрическим видом.

Невозможно не восхититься геометрической красотой и гармонией развлекательного комплекса "Galaxy Soho", построенного в столице Китая Пекине по проекту известной женщины архитектора Заха Хадид из Ирака (рис. 5).

5

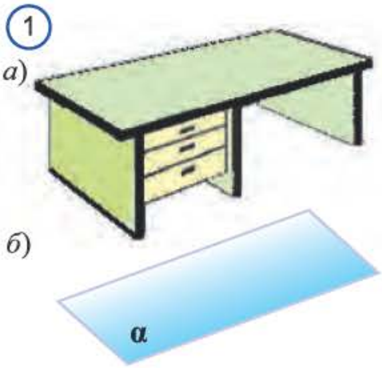
В столице нашей Родины поднимается проектируемый комплекс Ташкент Сити. Можно только представить, какие знания геометрии требуются инженерам для создания этой удивительной красоты (рис. 6).

6

ЧАСТЬ III

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

7 ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

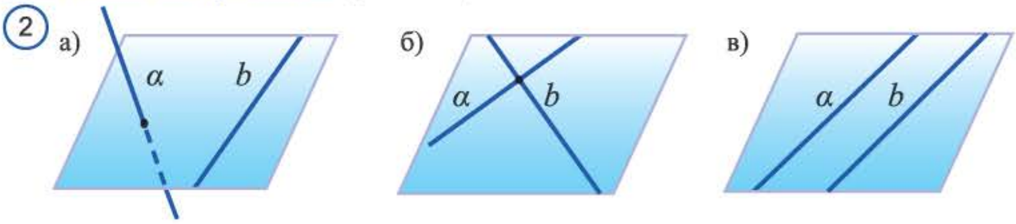


Основные геометрические фигуры в пространстве: точка, прямая и плоскость. Плоскость мы представляем в виде поверхности стола (рис. 1 а). Плоскость как и прямая бесконечна. На рисунке представляем только часть плоскости (рис. 1 б). Однако, мы предполагаем, что ее можно продолжить в любую сторону и на чертеже изображаем в виде параллелограмма (рис. 1 б). Плоскости обозначаем прописными греческими буквами α, β, γ, ...

Две прямые в пространстве могут пересекаться или не пересекаться (рис. 2). В пространстве две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися* (рис. 2 а).

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися* прямыми (рис. 2 б).

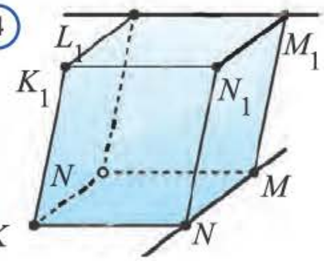
Прямые, лежащие в одной плоскости и непересекающиеся, называются *параллельными прямыми* (рис. 2 в).



Примером скрещивающихся прямых могут быть две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая под эстакадой (рис. 3). Точно также, прямые, на которых лежат ребра MN и L_1M_1 параллелепипеда являются скрещивающимися (рис. 4).

3

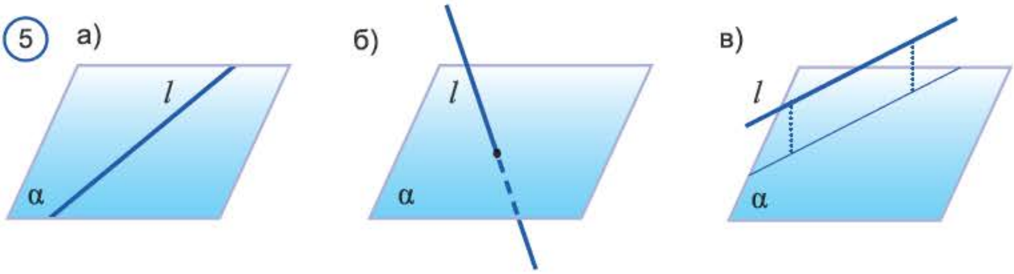
4



Как расположены относительно друг друга прямая и плоскость в пространстве?

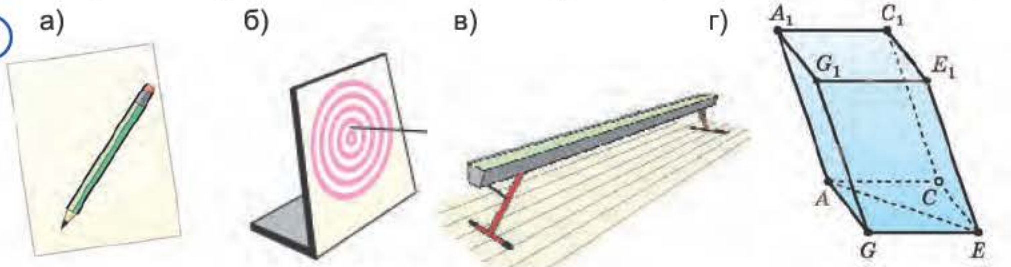
Прямая может лежать на плоскости (рис. 5.а), пересекать ее (рис. 5.б) или не пересекать, то есть иметь или не иметь с плоскостью общую точку (рис. 5.в). В последнем случае говорят, что ***прямая параллельна плоскости***.

5

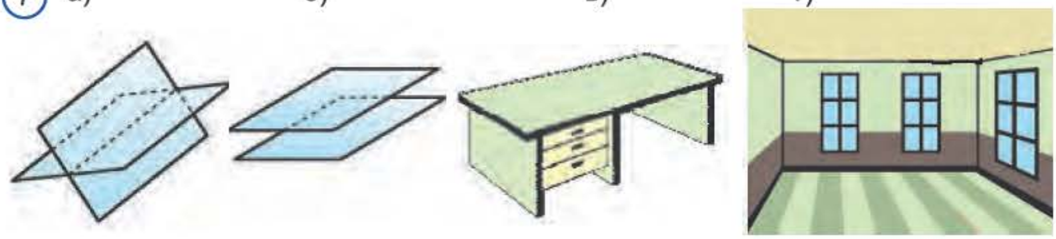


Карандаш, лежащий на столе, дает представление о прямой, лежащей на плоскости (рис. 6 а), стрела, направленная в цель (рис. 6 б) – о прямой пересекающей плоскость, гимнастическое бревно и пол спортивного зала – о прямой параллельной плоскости (рис. 6 в).

6



7 а) б) в) г)



Точно также, прямая, содержащая диагональ AE параллелепипеда $AGEC$ (рис. 6.г), лежит в плоскости основания, пересекает плоскость грани AGA_1G_1 и параллельна плоскости верхнего основания $A_1G_1E_1C_1$.

Теперь рассмотрим взаимное расположение плоскостей в пространстве.

В пространстве плоскости могут пересекаться по прямой (рис. 7 а) или не иметь общих точек (рис. 7 б). Тогда говорят, что эти плоскости соответственно *пересекаются* или *параллельны*.

Крышка стола и его боковушка, изображенные на рисунке 7в дают представление о пересекающихся плоскостях, а пол и потолок в помещении (рис. 7 г) – о параллельных плоскостях.

Аналогично, не противоположные боковые грани параллелепипеда (рис. 4), дают представление о пересекающихся плоскостях, а его верхняя и нижняя грани и противоположные боковые грани – о параллельных плоскостях.

Знаки параллельности – "$\parallel$" используют не только для параллельных прямых, но и для параллельных прямой и плоскости и для параллельных плоскостей: $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ и $\alpha \parallel \beta$.

В стереометрии, как и в планиметрии некоторые геометрические свойства фигур принимают без доказательств. Следующие свойства плоскостей называем группой аксиом C и принимаем их без доказательств.

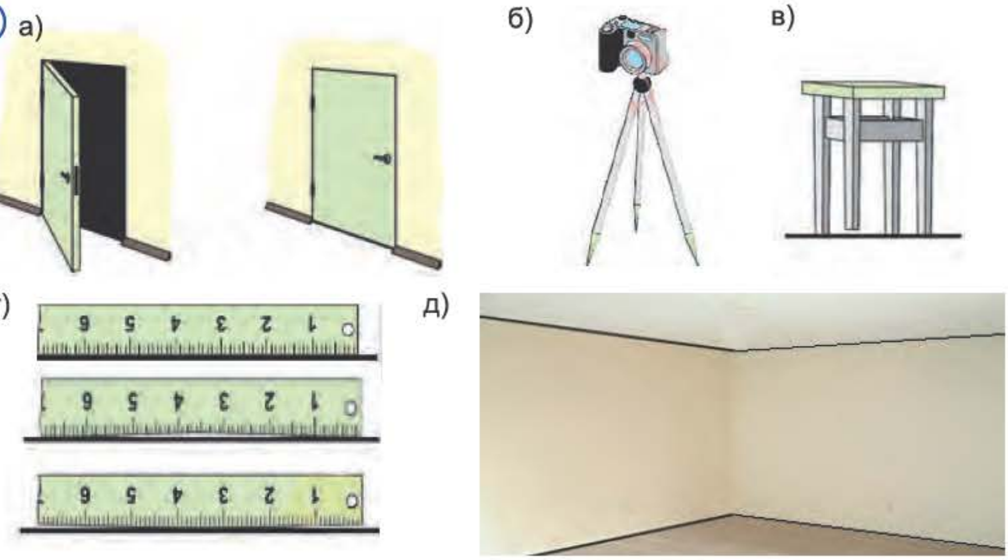
C_1 *Если три точки не лежат на одной прямой, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.*

C_2 *Если две точки прямой принадлежат одной плоскости, то все точки этой прямой принадлежат этой плоскости.*

C_3 *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, проходящую через эту точку.*

Активизирующее упражнение. На какие аксиомы можно сослаться при объяснении следующих случаев на рисунке 8?

8

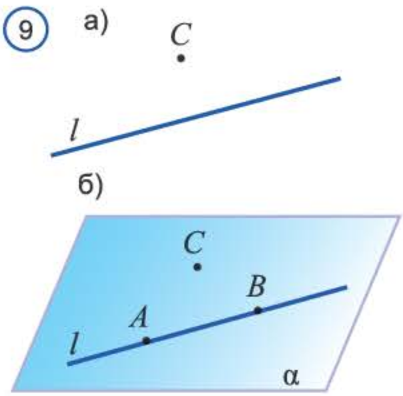


Эти три аксиомы вместе с введенными в планиметрии аксиомами являются основой стереометрии. Необходимо напомнить, что все фигуры, рассматриваемые в планиметрии, считались расположенными в одной плоскости. В стереометрии таких плоскостей бесконечно много и предполагаеся, что на каждой из них имеют место все аксиомы планиметрии и все доказанные в ней свойства. Поэтому, аксиомы планиметрии в курсе стереометрии рассматриваются с точки зрения стереометрии.

Теорема 2.1 ***Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести одну и только одну плоскость.***

Доказательство. Пусть l – заданная прямая, а C точка, не лежащая на ней (рис. 9 а). Сначала докажем существование плоскости, о которой говорится в заключении.

9

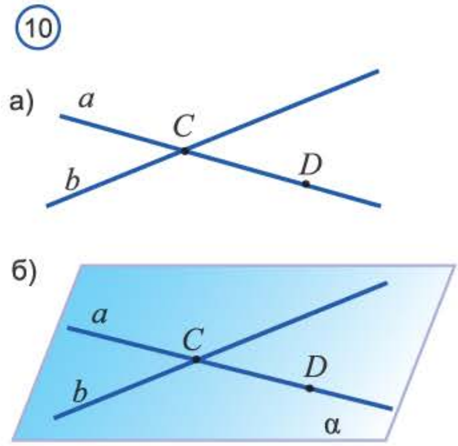


Отметим на прямой l точки A и B. По условию точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда по аксиоме C_1 через точки A, B и C можно провести плоскость α (рис. 9 б). А по аксиоме C_2 плоскость α проходит через прямую l. Следовательно, α – искомая плоскость..

Теперь докажем, что эта плоскость единственна.

Предположим обратное: Пусть через данную прямую l и не лежащую на ней точку C можно провести еще одну плоскость β. Тогда плоскость β также проходит через точки A, B и C. Однако, по аксиоме C_1 через три точки проходит только одна плоскость. Противоречие.

Следовательно, наше предположение неверно. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести одну и только одну плоскость. ❑



***Теорема 2.2* Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.**

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C (рис. 10 а).

Отметим на прямой a точку D, отличную от точки C. Тогда по доказанной теореме 1 через прямую b и не лежащую на ней точку D проходит единственная плоскость (рис. 10 б). Эта плоскость проходит через прямую a и точки C и D, лежащие на ней. Тогда, по аксиоме C_2 плоскость α проходит и через прямую a. Следовательно, плоскость α проходит через две пересекающиеся прямые.

Докажите единственность этой плоскости самостоятельно. ❑

Вопросы к теме

1. Назовите основные геометрические фигуры в пространстве.

2. Сформулируйте аксиомы группы С.

3. Какие прямые на плоскости называются: а) пересекающимися; б) параллельными?

4. Какие прямые называются скрещивающимися? Приведите примеры.

5. Как могут быть расположены две прямые в пространстве?

6. Какие прямые называются: а) лежащими в плоскости; б) параллельными ей?

7. Как могут быть расположены прямая и плоскость в пространстве?

8. Какие плоскости в пространстве называются: а) пересекающимися; б) параллельными?

9. Как могут быть расположены две плоскости в пространстве?

10. Сформулируйте аксиомы о свойствах прямой и плоскости в пространстве.

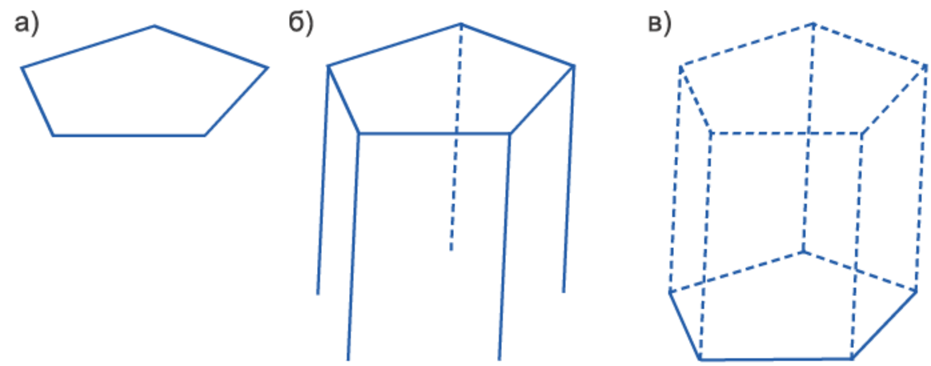
11. Сформулируйте аксиому о плоскости, проходящей через три точки.

8 ПОСТРОЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ И ИХ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

При решении геометрических задач очень важно построить правильный чертеж. Часто считают правильный чертеж – "половиной решения". Правильное построение стереометрических чертежей считается достаточно сложной, ответственной, а иногда и трудной работой, так как стереометрические фигуры имеют три измерения и их нужно изобразить на плоскости, на странице тетради. Неправильный чертеж может привести к неверному решению или к тупику.

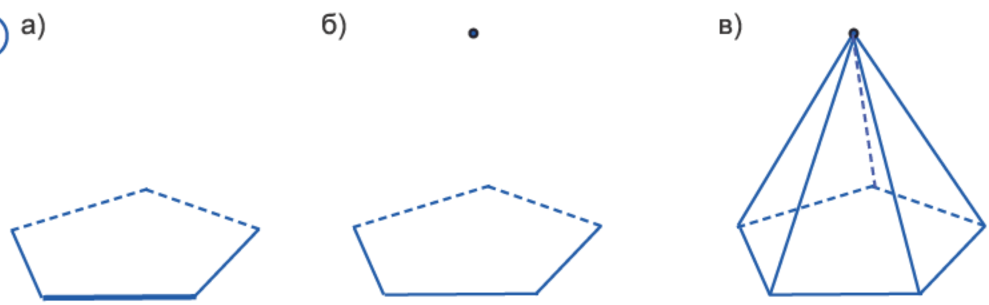
Построение призмы выполняют в следующем порядке (рис. 11). Сначала строят одно из оснований в виде многоугольника. Затем из каждой вершины многоугольника проводят параллельные и равные друг другу отрезки, то есть образующие призмы. Концы этих отрезков последовательно соединяют. Получают второе основание призмы. На чертеже невидимые ребра призмы чертят штрих-пунктирной линией.

11



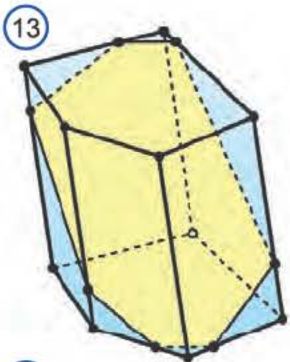
Построение пирамиды выполняют в таком же порядке (рис. 12). Сначала строят основание в виде многоугольника. Затем отметив вершину пирамиды, соединяют эту точку с каждой вершиной основания. На чертеже невидимые ребра пирамиды чертят пунктирной линией.

12



Правильный чертеж можно построить только при правильном представлении взаимного расположения пространственных геометрических фигур. Если одной из пространственных фигур является многогранник, а другой плоскость, то необходимо построить их сечение. Займемся построением таких сечений.

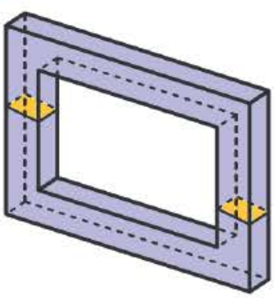
13



Пусть многогранник пересекает некоторая плоскость. Геометрическая фигура, являющаяся многоугольником, вершины которого – это точки пересечия многогранника и плоскости, называют *сечением многогранника.*

Секущая плоскость пересекает поверхность многогранника по отрезкам, а сечение многогранника состоит из одного или нескольких многоугольников. На рисунке 13 изображено сечение пятиугольной призмы, являющееся семиугольником. Сечение на рисунке 14, полученное пересечением рамы плоскостью, состоит из двух четырехугольников.

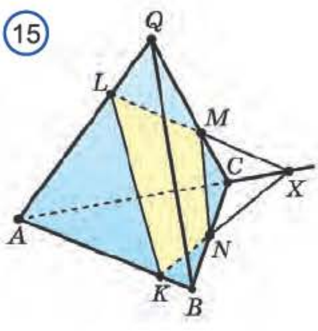
14



Чтобы изобразить сечение многогранника, нужно отметить общие точки его граней и секущей плоскости.

Задача 1. Построим сечение треугольной пирамиды *QABC*, которая пересекает ее ребра *AB*, *AQ* и *CQ* в точках *K, L M* соответственно (рис. 15).

15



***Построение*.** Секущая плоскость α имеет с гранью *AQB* пирамиды две общие точки: *K* и *L*. Следовательно секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку *KL*.

Аналогично, так как секущая плоскость α имеет с гранью *AQC* пирамиды две общие точки *M* и *L*, поэтому она пересекает эту грань по отрезку *ML*.

Секущая плоскость α имеет с гранью *ABC* пирамиды одну общую точку *K*. Найдем точку, в которой эта плоскость пересекается с ребром *BC*.

Продолжив прямые *LM* и *AC*, принадлежащие этой плоскости, найдем их точку пересечения *X*. Точка *X* лежит также в плоскостях *AQC* и *ABC*.

Секущая плоскость α имеет с гранью *ABC* пирамиды две общие точки: *K* и *X*. Тогда секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку *KX*.

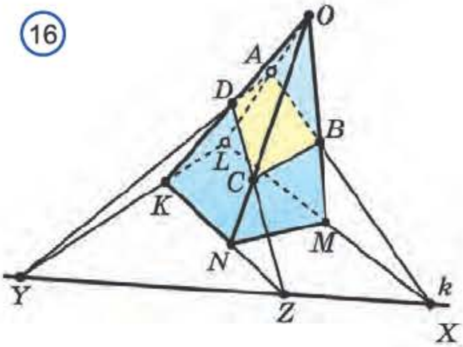
Точка N пересечения прямой KX и ребра BC также принадлежит плоскости α.

Следовательно, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN, а грань BQC по отрезку MN.

Четырехугольник $KLMN$ является сечением пирамиды плоскостью α. Каждый из отрезов KL и KN называют *следом* плоскости α на гранях ABQ и ABC соответственно.

Задача 2. Построим сечение треугольной пирамиды $OKLMN$, полученное пересечением плоскости b с ребром пирамиды OL в точке A и прямой k, лежащей в основании пирамиды $KLMN$ (рис. 16).

16

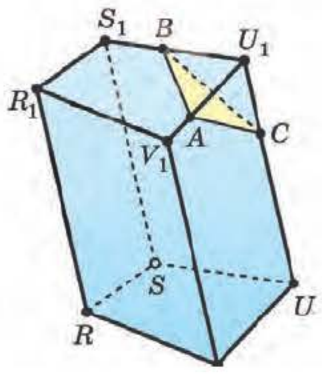


Построение. Найдем точку пересечения прямых LM и k. Так как эта точка лежит на прямой k, то она принадлежит и плоскости β. Подобно этому, так как эта точка лежит на прямой LM, то она принадлежит и грани LOM. Точка A принадлежит обеим этим плоскостям. Поэтому плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX, а грань LOM по отрезку AB. Точка B является точкой пересечения прямых AX и OM.

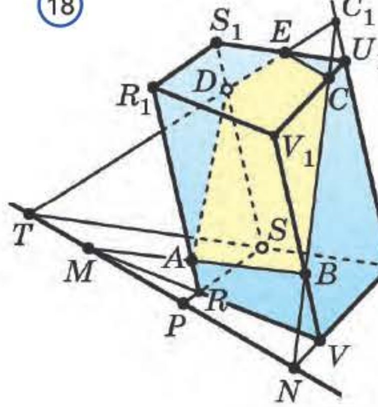
Точно также, определяем точки Y и D пересечения плоскости β и ребра OLK и отрезка AD. Затем определяем точки Z и C и прямые DC и BC. В результате, полученный четырехугольник $ABCD$ является искомым сечением.

Задача 3. Точки A, B и C лежат на разных ребрах четырехугольной призмы. Найдем сечение призмы плоскостью ABC (рис. 17).

17



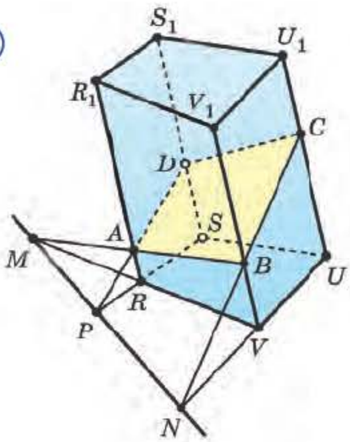
18



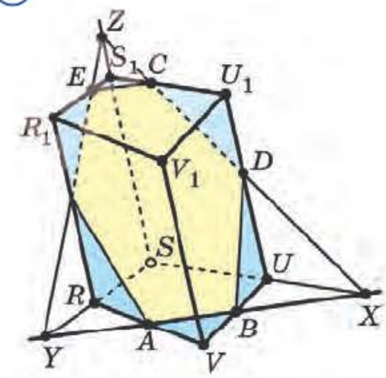
Искомое сечение зависит от того, на каких ребрах четырехугольной призмы и как расположены точки A, B и C. На рисунке 17 изображен наиболее простой случай, когда точки A, B и C расположены на ребрах, исходящих из одной вершины.

Построение сечения в случае, изображенном на рисунке 18, считается более сложным. Оставшиеся случаи сечений приведены на рисунках 19 и 20. Как видите, сечение может быть треугольником, четырехугольником, пятиугольником и шестиугольником. Построение этих сечений выполните самостоятельно.

19



20

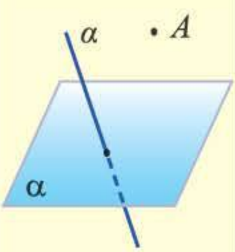
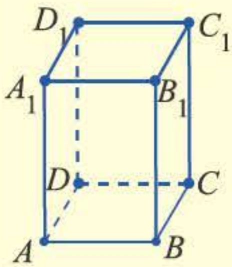
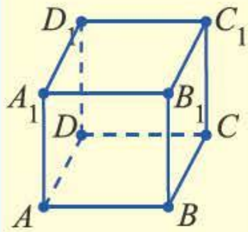
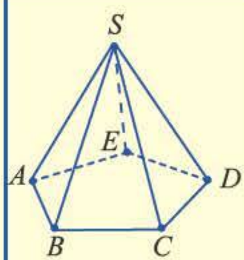


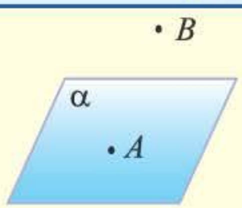
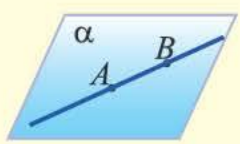
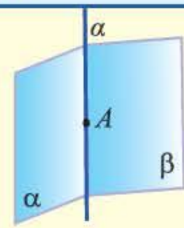
Вопросы к теме

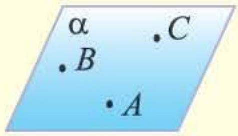
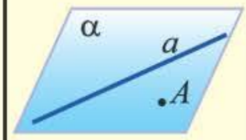
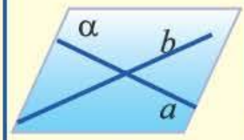
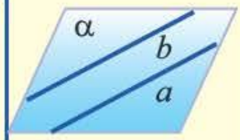
1. *Что называют сечением многогранника?*
2. *Какой фигурой может быть сечение многогранника?*
3. *Что называют следом одной плоскости на другой плоскости?*
4. *Какой фигурой может быть сечение четырехугольного многогранника?*

9 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

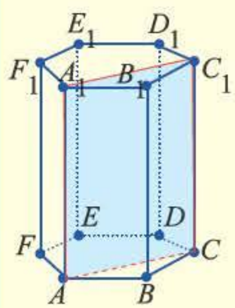
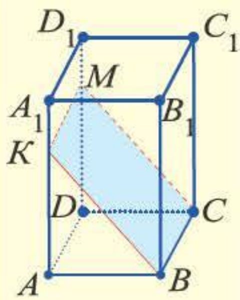
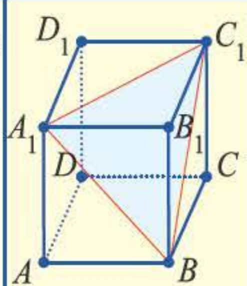
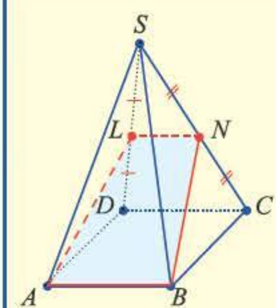
Повторите следующие опорные практические сведения, изученные в предыдущих трех разделах. Они помогут вам обобщить пройденное и решить практические задачи.

Основные фигуры	**Многогранники**		
	Прямоугольный параллелепипед	**Куб**	**Пирамида**
			
A точка, *a* прямая, α плоскость	Основания – прямоугольники, грани – прямоугольники,	Основания – квадраты, грани – квадраты	Основание – многоугольник, грани – треугольники

Аксиомы стереометрии и их следствия		
		
Существуют точки, принадлежащие плоскости и не принадлежащие ей.	Если две точки прямой лежат на одной плоскости, то все точки этой прямой принадлежат этой плоскости.	Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, проходящую через эту точку.

			
Через три точки, не лежащие на одной прямой	Через прямую и не лежащую на ней точку	Через две пересекающиеся прямые	Через две параллельные прямые
... можно провести одну и только одну плоскость			

а) В таблице представлены некоторые простейшие сечения многогранников. Рассмотрите их внимательно и объясните как получить эти сечения.

Простейшие сечения многогранников			
Многоугольная призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – секущая плоскость, проходящая через точки A, C, C_1, ACC_1A_1 – сечение.	CBK – секущая плоскость, проходящая через точку K и прямую CB, $CBKM$ – сечение.	A_1BC_1 – секущая плоскость, проходящая через прямые BC_1 и BA_1, A_1BC_1 – сечение.	ABN – секущая плоскость, проходящая через параллельные прямые AB и LN, $ABNL$ – сечение.

б) В таблице приведены аналогичные свойства геометрических фирур: в левой колонке для плоскости, а в правой – для пространства. Определите чем они похожи и чем различаются. Какими еще общими свойствами обладают плоскость и пространство?

На плоскости	В пространстве
Если прямые имеют общую точку, то они пересекаются в этой точке.	Если плоскости имеют общую прямую, то они пересекаются по этой прямой.
Через любую точку плоскости можно провести бесконечно много прямых.	В пространстве через прямую можно провести бесконечно много плоскостей.
Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.	Через прямую, не лежащую на данной плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной.
Прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны.	Плоскости, параллельные одной и той же плоскости, параллельны.

3.1. Сколько общих точек могут иметь в пространстве: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости?

3.2. Могут ли иметь в пространстве единственную общую точку: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости; г) три плоскости?

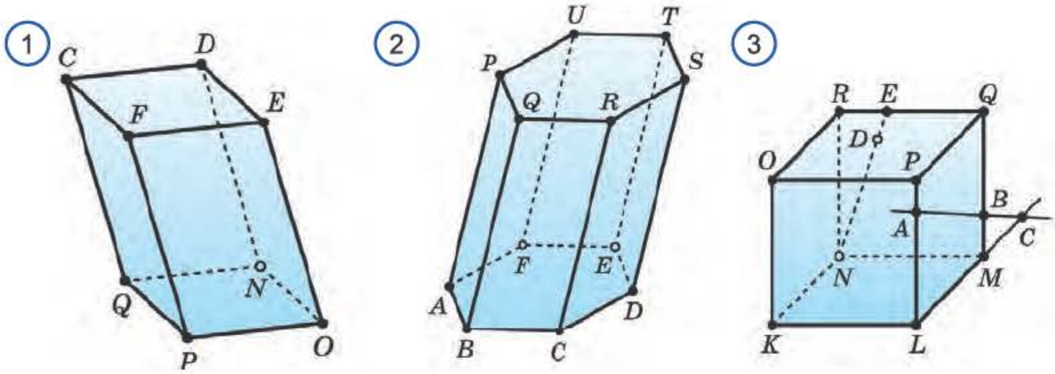
3.3. На рисунке 1 изображен параллелепипед $NOPQDEFC$. Какие прямые: а) пересекают прямую CD; б) пересекают прямую FP; в) параллельны прямой CD; г) параллельны прямой FP; д) являются скрещивающимися для прямой CD; е) являются скрещивающимися для прямой FP?

3.4. На рисунке 2 изображена призма $ABCDEFPQRSTU$ с шестиугольным основанием. Назовите прямые: а) пересекающие плоскость ABC; б) пересекающие плоскость UTF; в) лежащие в плоскости PTR; г) принадлежащие плоскости CDR; д) параллельные плоскости FEC; е) параллельные плоскости AQB .

3.5. Для параллелепипеда $NOPQDEFC$ на рисунке 1 назовите: а) плоскости, пересекающиеся с прямой CQ; б) плоскости, пересекающиеся с прямой OP; в) плоскости, содержащие прямую NO; г) плоскости, содержащие прямую DN; д) параллельные прямой CF; е) параллельные прямой EO.

3.6. На рисунке 2 изображен параллелепипед $ABCDEFPQRSTU$ с шестиугольным основанием. Назовите плоскости: а) пересекающие плоскость UQR; б) пересекающие прямую FT; в) параллельные плоскости ACE; г) параллельные плоскости ETS.

3.7. Используя рисунок 3, назовите: а) точки, лежащие на плоскостях LMQ и NME; б) плоскости, на которых лежит прямая NR; в) точки пересечения



прямой BC и плоскости KLN; г) точки пересечения прямых PL и ND с плоскостью OPR; д) прямые пересечения плоскостей KON и KLM; е) прямые пересечения плоскостей PDQ и MNK; ж) точки пересечения прямых AB и LM; з) точки пересечения прямых BQ и MC.

3.8. Докажите, что через три точки можно провести плоскость. Сколько таких плоскостей?

3.9. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

3.10. Можно ли провести прямую, проходящую через точку пересечения двух заданных прямых и не лежащую в плоскости пересечения этих прямых? Обоснуйте ответ.

3.11. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

3.12. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

3.13. Прямые a и b не лежат в одной плоскостиt. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

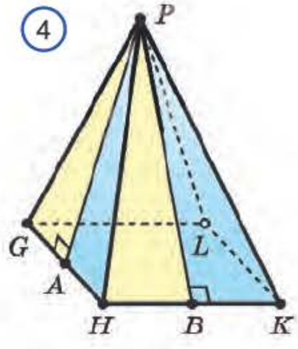
3.14. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

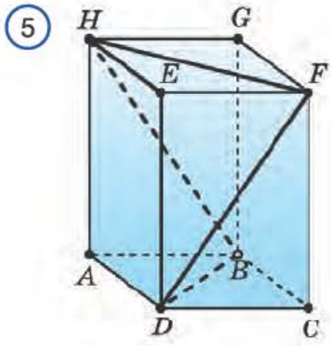
3.15. Докажите, что через одну из скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой.

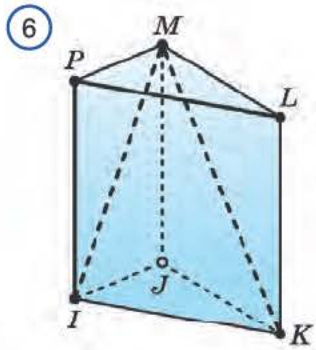
3.16. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC треугольника в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: а) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = = 2 : 3$; б) $AB = 8$ см, $AA_1 : AC = 5:3$; в) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4:5$; г) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.

3.17. Дана правильная четырехугольная пирамида (рис. 4). Докажите, что $\Delta PGA = \Delta PHB$, если PA и PB – высоты граней PGH и PHK пирамиды.

3.18. $ABCDHGFE$ прямоугольный параллелепипед (рис. 5), ребро которого равно 8 см, а основанием является квадрат со стороной 6 см. Найдите длину пространственной ломаной линии *HFDBH*.



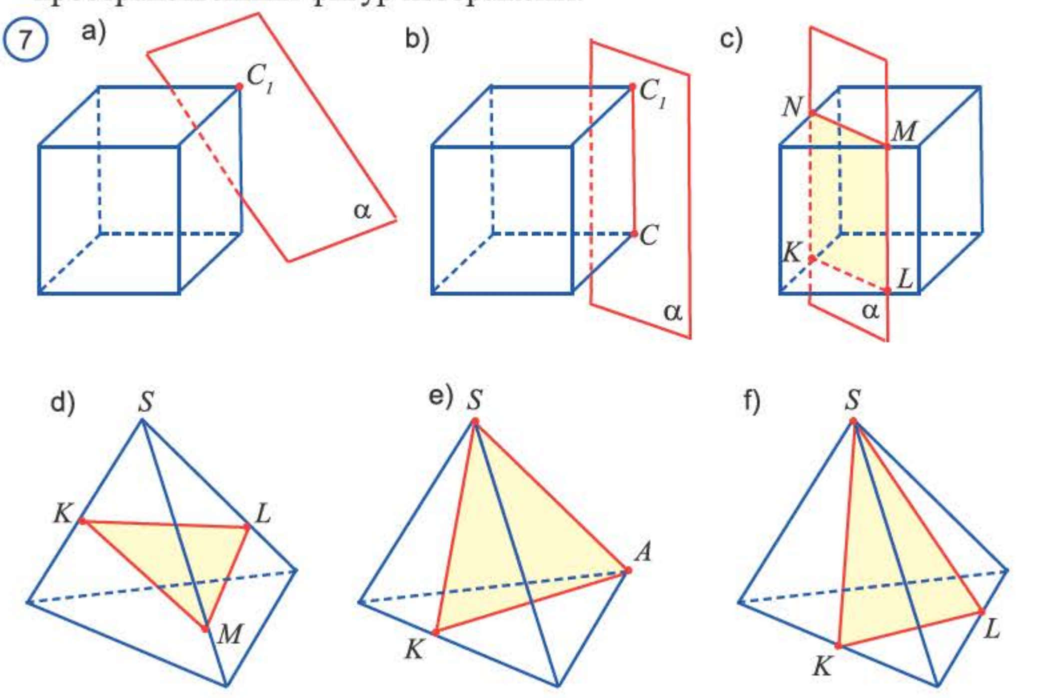




3.19. В прямой треугольной призме *IJKPML* (рис. 6) отношение длины стороны основания и бокового ребра равно 2:3. Найдите боковую поверхность призмы, если длина пространственной ломаной линии *IPLKMI* равна $16+4\sqrt{13}$.

3.20. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, равна 12 см^2. Найдите диагональ параллелепипеда, если диагональ основания равна $\sqrt{2}$.

3.21. Разъясните для случаев, приведенных на рисунке 7, какие сечения пространственных фигур изображены.



3.22. На ребрах AD и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M и N. Постройте сечение куба, полученное при пересечении его плоскостью MNB_1.

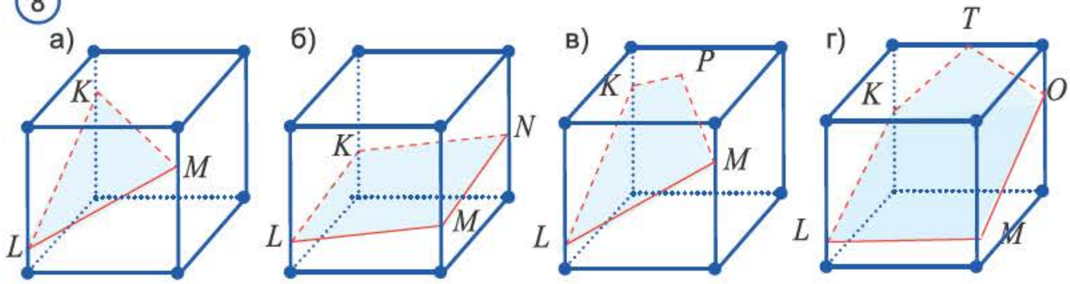
3.23. Начертите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M, N и L в серединах его ребер AB, BC и BB_1. а) Постройте сечение куба плоскостью MNL; б) докажите, что треугольник MNL правильный; в) найдите площадь треугольника MNL, если ребро куба равно 1 см.

3.24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 6$ см, ребро $AD = 6$ см и ребро $AA_1 = 8$ см. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью BC_1D является равносторонним треугольником и найдите высоту этого треугольника.

3.25. Начертите призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через середины M, N и L его ребер AD, AA_1 и DD_1.

3.26. Какие из случаев, изображенных на рисунке 8 возможны при пересечении куба плоскостью? Какие не возможны?

8

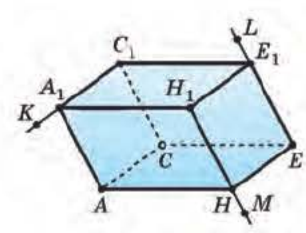


3.27. На основании данных, приведенных на рисунке 9, постройте сечения, соответствующие пространственным фигурам, проходящие через точки: а) K, L и M; б) A, B и C; в) A, B и C.

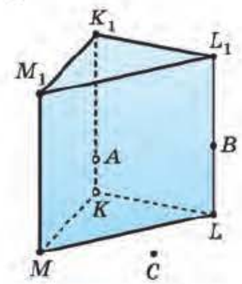
3.28. На ребрах MM_1, M_1P_1 и M_1T_1 призмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ отмечены точки A, B и C (рис. 10). Постройте сечение призмы плоскостью ABC.

3.29. На основании данных, приведенных на рисунках, постройте сечения соответствующих пространственных фигур проходящие через точек: а) U, V и W (рис. 11); в) A и B (рис. 12).

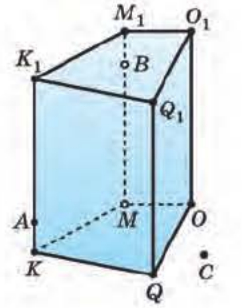
9 а)



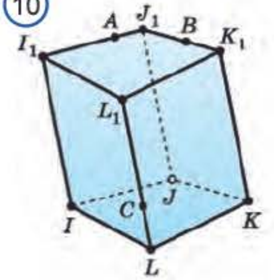
б)



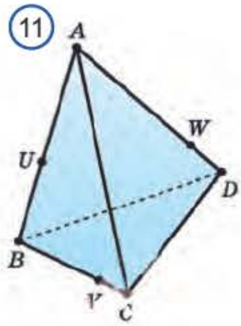
в)



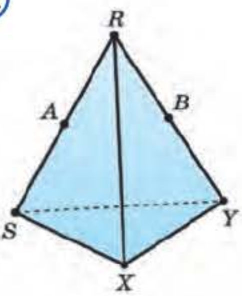
10



11



12



Применение и формирование практической компетентности.

1. Почему прежде, чем рыть котлован под здание нужно провести разметку туго натянутыми нитями?

Ответ: пересечением двух плоскостей является прямая.

2. Почему поверхность будущего кирпича становится плоской?

Ответ: При формовке сырцовых кирпичей, после закладки саманной глины мастер убирает излишки глины, проводя плоским мастерком по поверхности формы.

3. При сборке стульев плотник проверяет, лежат ли ножки стула в одной плоскости, натягивая нить между его противоположными ножками. Попробуйте применить этот метод и обоснуйте его.

Ответ: Две пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость.

4. Каким образом плотник добивается плоской поверхности, распиливая деревянные бруски?

Ответ: проведя на двух соседних гранях бруска отрезки AB и AC, плотник старается делать пропил прямо по этим отрезкам. В результате, из-за того, что через две пересекающиеся прямые проходит одна плоскоть, отпилинная поверхность получается плоской.

5. Почему штатив, на который устанавливается фотоаппарат, обычно

делают с тремя ножками?

Ответ:через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.

6. Каким способом пользуется плотник, чтобы проверить, плоская ли поверхность деревянного бруска. На чем основывается этот способ?

Ответ: если две точки прямой лежат на плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.

7. Почему трехколесный мотоцикл устойчивее двухколесного мотоцикла? *Ответ: через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.*

8. Почему незакрытые двери приоткрываются при сквозняке? Почему то же самое не происходит с закрытыми дверьми?

Ответ: через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость.

9. Сколько кирпичей понадобится для постройки 18 колонн, если поперечное сечение каждой колонны есть квадрат со стороной 7 дм, а высота колонны – 4 м? Размеры кирпича: 1 x 1,5 x 3 дм, а отходы составляют 5 %.

Ответ: 8200 *шт.*

Ответы

1.23. *AB//CD*. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ см, $8\frac{2}{3}$ см. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **1.26.** 14 см. **1.27.** $8\sqrt{3}$ см. **1.28.** 17 см. **1.29.** 24 см. **1.30.** 4,8 см. **1.31.** 18 см.

2.6. 256 м^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ см^2. **2.9.** а) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; б) 1200; 1400; в) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; г) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** а) $6\sqrt{13}$ см; $18\sqrt{3}$ см; б) $405\sqrt{3}$ см^2; в) $648\sqrt{3}$ см^2. **2.11.** а) $2\sqrt{82}$ см; 2 $\sqrt{73}$ см; б) 48 $\sqrt{73}$ см^2; в) $144+48\sqrt{73}$ см^2. **2.12.** а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ м; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ м; б) 192 м^2; в) 282 м^2; **2.13.** а) 5 м; $\sqrt{89}$ м; б) $8(5+\sqrt{34})$ м^2; в) $8(11+\sqrt{34})$ м^2. **2.14.** а) 13 см; 12 см; б) 360 см^2; в) $30(12+5\sqrt{3})$ см^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ см^2. **2.17.** а) 168π см^2; б) 168π см^2; в) $2{,}4\pi$ м^2; г) $1{,}68\pi$ м^2. **2.18.** 625π см^2. **2.19.** 252π м^2. **2.20.** π^2 м^2. **2.21.** 4 см; 16 см. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 м^2. **2.24.** 37 мм. **2.25.** 1040π см^2. **2.26.** а) 75π см^2; б) 288π дм^2; в) $6{,}25\pi$ м^2. **2.28.** а) 88π см^2; б) 88π см^2; в) 540π см^2; г) $3{,}24\pi$ м^2;

3.18. $\sqrt{10}$ см. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ см. **3.20.** 72 дм^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м^2.

Учебно-методическая литература и электронные ресурсы, использованные при подготовке учебника и рекомендуемые для дополнительного изучения

1. A. A'zamov, B. Haydarov, Matematika sayyorasi, Toshkent, «O'qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov, Matematika va matematiklar haqida, Toshkent, «O'qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug'ati, Toshkent, «O'zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina, Matematika va go'zallik, Toshkent, «O'qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov, Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O'qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev, Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma, Toshkent, 2004.
7. I. Israilov, Z. Pashayev, Geometriya. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. II qism. Toshkent, «O'qituvchi», 2005.
8. А.В. Погорелов, "Геометрия 10–11", учебник, Москва, "Просвещение", 2009.
9. С. Атанасян, "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва, "Просвещение", 2002.
10. Я.И. Перельман, Қизиқарли геометрия, Тошкент, "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский, Математическая смекалка. Москва, «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов, "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия- 10", учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров, "Геометрия 10–11", учебник, Москва, "Просвещение", 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Информационно-образовательный портал Министерства народного образования.
20. http://www/multimedia.uz – Информационно-образовательный портал Мультимедийного центра.
21. http://www.school.edu.ru – Общеобразовательный портал.
22. http://mathc.chat.ru – Математический калейдоскоп.
23. http://www.problems.ru – Система поиска задач по математике.
24. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Задачи олимпиад по математике.
25. http://www.ixl.com – Сайт дистанционного образования (на англ. языке).
26. http://www.mathkang.ru – Сайт международного математического конкурса "Кенгуру".

М.А.Мирзаахмедов, Б.К.Хайдаров, Ш.Н.Исмаилов, А.К.Аманов

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ I

Учебник для учащихся 10 классов средних образовательных учреждений и учащихся учреждений среднего специального, профессионального образования

Редактор	Рахимова Д.
	Хошимова Н.
Художественный редактор	Убайдуллаев З.
Технический редактор	Мадияров К.
Корректор	Рахимова Д.
Компьютерный дизайн	Ахмедов А.

Лиц. изд. AI № 296 22.05.2017.
Подписано в печати 25.10.2017. Формат 70x90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ.л. 9,0. Печ.л . 8,56.
Тираж 49607 экз.
Оригинал-макет подготовлен в издательстве
ООО «Extremum-press» 100053., г.Ташкент, ул. Богишамол, 3.
Тел:234-44-05.E-mail: Extremum-press@mail.ru
Отпечатано в ИПТД «O‘qituvchi»
Агентства печати и информации Узбекистана
100206, Ташкент, улица Яигишахар, дом 1.